

А. И. ЧЕТИСОВ

**ОЧЕРКИ
ПО ЕВКЛИДОВОЙ
И НЕЕВКЛИДОВОЙ
ГЕОМЕТРИИ**

**АКАДЕМИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР
ИНСТИТУТ ОБЩЕГО И ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

А. И. ФЕТИСОВ

**ОЧЕРКИ
ПО ЕВКЛИДОВОЙ
И НЕЕВКЛИДОВОЙ
ГЕОМЕТРИИ**

**ИЗДАТЕЛЬСТВО „ПРОСВЕЩЕНИЕ“
Москва • 1965**

*Печатается по решению Ученого совета
Института общего и политехнического образования
АПН РСФСР*

ВВЕДЕНИЕ

Нельзя не отметить, что весьма часто люди, даже достаточно подготовленные математически, относятся к идеям неевклидовой геометрии с недоверием, считая, что единственным правильным учением о пространстве является классическая евклидова геометрия. Подтверждением этому служит тот факт, что даже у нас, на родине Н. И. Лобачевского, не прекращаются попытки «доказательства» 5-го постулата Евклида и научные учреждения СССР систематически получают письма с такими «доказательствами» и с опровержением неевклидовой геометрии. Совсем недавно в президиум АПН РСФСР поступило письмо, автор которого считает, что «преподавание геометрии Лобачевского в педвузах и университетах нашей страны является государственным преступлением, так как...» и далее следует весьма наивное опровержение одной из основных теорем неевклидовой геометрии.

Все эти факты свидетельствуют о том, что необходима самая широкая популяризация идей неевклидовой геометрии, тем более, что без понимания их окажутся непонятными и многие идеи современной физики и астрономии. В настоящее время, когда человек проник в межпланетное пространство и изучает строение атомного ядра, становится совершенно неотложной задачей выяснение свойств космического пространства и определение пространственной структуры микромира, а для этого необходимо определить, каковы геометрии этих пространств. Цель дальнейшего изложения — дать некоторое представление о свойствах пространств, отличных от евклидова пространства, которое служит предметом нашего повседневного опыта. Для чтения книги не требуется никаких дополнительных сведений, кроме знания математики в пределах школьной программы.

Однако некоторые привычные понятия и предложения классической геометрии придется в одних случаях расширить, в других — изменить, чему будут посвящены первые главы. Для активизации самостоятельной работы читателя над книгой, а иногда для углубления некоторых вопросов главы снабжены упражнениями, работа над которыми поможет лучше усвоить изложение, а также познакомиться с предложениями, необходимыми для понимания дальнейших выводов. Задачи, помеченные *звездами*, должны быть непременно решены, так как результаты решения используются в тексте.

Основная мысль книги: *пространство есть совокупность некоторых геометрических образов, связанных между собой определенными взаимоотношениями*. В зависимости от характера этих связей получаются различные виды пространства, как евклидово, так и неевклидово. Чтобы убедиться в этом, мы сначала построим пространство, основные элементы которого отличны от образов классической геометрии, а в то же время взаимоотношения между ними и все следствия из них в точности отображают аксиомы и теоремы, изучаемые в школе. Подобным же образом будут построены пространства неевклидовых геометрий.

КРАТКИЕ ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1. 1. Геометрия как наука возникла в процессе практической деятельности людей. Людям нужно было сооружать жилища и хозяйственные постройки, проводить дороги и каналы, устанавливать границы земельных участков и определять их размеры.

Немалую роль в этом отношении сыграли и эстетические потребности людей: желание украсить жилище и одежду, изобразить картины окружающей жизни. Все это заставило человека познавать пространственные свойства вещей материального мира и изучать обнаруживающиеся при этом закономерности. Эти закономерности неоднократно проверялись и подтверждались многочисленными наблюдениями и опытами, и полученные знания передавались от поколения к поколению сначала устно, потом письменно.

Этот естественный и неизбежный путь познания окружающего нас мира, при котором мы открываем определенные закономерности, наблюдая большое число предметов и явлений и переходя от частных случаев к обобщению, носит в науке название *и н д у к ц и и* (от латинского слова *inductio* — наведение).

Уже за несколько столетий до нашей эры культурные народы древности располагали сведениями о пространственных свойствах предметов, умели измерять длины, площади и объемы и применяли свои знания в практической жизни. Однако знания эти еще не были систематизированы и сообщались обычно в виде правил и рецептов.

1. 2. На формирование науки геометрии оказали значительное влияние исследования мыслителей древней Греции, которыми впервые были сформулированы основные

положения науки о законах правильного мышления — логики.

Среди этих мыслителей в первую очередь нужно назвать Аристотеля (384 — 322 гг. до н. э.). Было установлено, что новые истины (т. е. соответствующие действительности знания о предметах окружающего нас мира) можно получить и не прибегая к наблюдениям и опытам, а используя ранее добытые истины и делая из них правильные выводы. Такой путь нашего мышления, когда мы из общих истин получаем частные выводы, носит в науке название дедукции (от латинского слова *deductio* — выведение).

Если правила дедукции применить к изучению пространственных форм, то мы увидим, что многие их свойства мы можем обнаружить, применяя правила вывода к уже установленным свойствам и закономерностям. Например, зная из многократных опытов и наблюдений, что «через две точки можно провести одну и только одну прямую линию», мы уже без всяких опытов можем утверждать, что «две различные прямые могут иметь не более одной общей точки».

Дальнейшее развитие этих идей привело ученых древней Греции к мысли соединить все знания о пространстве в такую систему, в которой подавляющее число найденных закономерностей получалось бы путем логических выводов из сравнительно небольшого числа ранее установленных и многократно проверенных опытным путем истин. Так возникла наука, получившая у греков название геометрии и сохранившая это название до наших дней.

Само слово «геометрия» происходит от двух греческих слов: $\gamma\eta$ — земля и $\mu\epsilon\tau\rho\epsilon\omega$ измеряю, и по-русски должно быть переведено словом «землемерие».

Попытки греческих ученых построить систему геометрии начинаются, по-видимому, с V столетия до н. э. Но наибольшее влияние на все последующее развитие геометрии оказала система геометрии, изложенная в работе греческого ученого Евклида, жившего в Александрии в III столетии до н. э. Сочинения Евклида, называемые «Начала», состоят из тринадцати книг, содержание которых охватывает в основном все то, что в настоящее время изучается в школьном курсе элементарной геометрии.

1. 3. «Начала» Евклида в течение почти 2000 лет были основной книгой, по которой изучали геометрию. Она была переведена на языки всех культурных народов мира. Не-

однократно переводилась она и на русский язык. Последнее русское издание «Начал» вышло в 1948 — 1950 гг. под редакцией профессора Д. Д. Мордухай-Болтовского.

Евклид начинает изложение геометрии с перечисления основных предложений, на которые опирается вся система этой науки. К этим предложениям он относит: 1) о п р е д с л е н и я, которыми объясняется смысл употребляемых в дальнейшем слов; 2) а к с и о м ы и п о с т у л а т ы, в которых устанавливаются соотношения, связывающие основные понятия геометрии и принимаемые без доказательства.

Приведем примеры о п р е д е л е н и й из «Начал» Евклида.

1. Точка есть то, что не имеет частей.
2. Линия есть длина без ширины.
3. Прямая линия есть та, которая равно расположена по отношению к точкам на ней.
4. Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.

С современной точки зрения эти определения далеко не безукоризненны, однако на дальнейшее изложение «Начал» это обстоятельство не оказывает существенного влияния, так как автор этими определениями не пользуется.

Приведем примеры п о с т у л а т о в.
Допустим:

1. От всякой точки до другой точки можно провести прямую линию.
2. Ограниченную прямую можно непрерывно продолжить по прямой.
3. Из всякого центра всяким раствором может быть описан круг.
4. Все прямые углы равны между собой.
5. Если прямая, пересекающая две прямые, образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых углов, то эти две прямые при неограниченном продолжении пересекутся с той стороны, где эта сумма меньше.

Все эти предложения называются постулатами, так как содержат в себе допущение (postulatum — требование, допущение).

Приводим примеры некоторых а к с и о м.

1. Равные одному и тому же равны между собой.

2. Если к равным прибавляются равные, то и суммы будут равны.

3. Если от равных отнимаются равные, то и остатки будут равны.

Аксиома 7 содержит определение геометрического равенства (конгруэнтности):

7. Совмещающиеся друг с другом равны между собой.

Все последующее изложение геометрии состоит из предложений — теорем (θεωρήματα — от глагола θεωρέω — обдумываю), каждое из которых выводится из ранее установленных предложений, т. е. сопровождается доказательством.

1. 4. Дальнейшее развитие геометрии шло в направлении усовершенствования системы Евклида, исправления неточностей, включения новых теорем. При этом особое внимание геометров привлекал к себе 5-й постулат. С одной стороны, его формулировка была слишком сложной по сравнению с другими постулатами и аксиомами, а с другой стороны, и самый факт существования точки пересечения не казался столь очевидным и бесспорным, как факты, утверждаемые в других аксиомах и постулатах. Причиной этого явилось то, что в 5-м постулате мы впервые сталкиваемся с понятием бесконечного. В то время как в остальных постулатах описываются свойства фигур, легко проверяемые и обозримые на ограниченном куске плоскости, произвести такую же проверку 5-го постулата оказывается физически невозможным.

Действительно, если сумма внутренних односторонних углов, о которых идет речь в постулате, сильно отличается от 180° (рис. 1), то очень легко убедиться, что прямые a и b пересекутся в пределах чертежа. Если же эта сумма очень мало отличается от 180° , например равна $179^\circ 30'$, как это сделано на рисунке 2, где $\angle \alpha = 60^\circ$, а $\angle \beta = 119^\circ 30'$, то существование точки пересечения оказывается совсем не очевидным: эта точка либо находится очень далеко за пределами чертежа, либо вовсе не существует.

Желание построить логически безупречную систему геометрии побудило многих геометров искать новую, более простую формулировку 5-го постулата и вместе с тем найти доказательство этого постулата, основываясь на всей совокупности ранее установленных постулатов и аксиом.

Над усовершенствованием книги Евклида работали многие выдающиеся ученые древности: Архимед, Аполлоний (III в. до н. э.), Геминус, Никомах (I в. до н. э.), Папп (III в. н. э.), Теон и Прокл (V в. н. э.).

Однако все попытки доказать 5-й постулат или заменить его другим, совершенно очевидным предложением были безуспешны.

1. 5. Когда угасла греческая культура и в Европе наступила мрачная эпоха средневековья, центром мировой цивилизации сделался арабский Восток. «Начала» Евклида

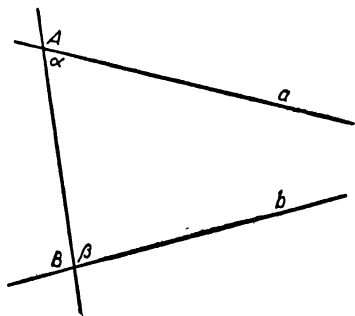


Рис. 1

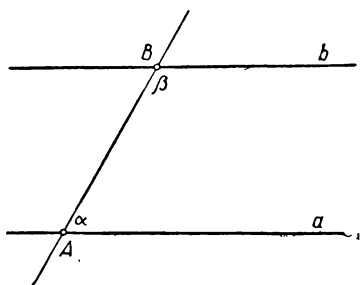


Рис. 2

были переведены на арабский язык, и арабские ученые, продолжая работы своих греческих предшественников, вновь делают попытки доказать 5-й постулат. Наиболее значительная и важная работа в этом направлении принадлежит арабскому ученому Насир-Эддину (1201—1274 гг. н. э.). Его очень интересные и оригинальные исследования по теории параллельных прямых все же не привели к желаемому результату, и 5-й постулат остался недоказанным.

С началом эпохи Возрождения у европейских ученых вновь проявляется интерес к геометрии.

«Начала» Евклида были первоначально (в XV в.) переведены с арабского языка на латинский, а позднее — в XVI в. — был найден и издан греческий текст этой книги. Вместе с изучением «Начал» вновь возникают попытки доказательств 5-го постулата.

К этому времени выяснилось, что 5-й постулат Евклида можно заменить другими, эквивалентными предложениями.

Например, 5-й постулат был бы доказан, если бы было доказано одно из следующих предложений: 1. Через данную точку к данной прямой можно провести одну и только одну параллельную прямую. 2. Существует треугольник, сумма внутренних углов которого равна двум прямым углам. 3. Существуют два подобных, но не равных между собой треугольника. 4. Соотношения параллельности между прямыми суть условия эквивалентности, т. е. они удовлетворяют: а) условию симметрии — если $a \parallel b$, то и $b \parallel a$; б) условию рефлексивности — $a \parallel a$; в) условию транзитивности — если $a \parallel b$, $b \parallel c$, то и $a \parallel c$ (независимо от направления прямых).

Однако доказательство этих предложений встретило те же самые непреодолимые трудности, какие встречались при попытках непосредственного доказательства 5-го постулата.

Весьма большой интерес представляют работы итальянского ученого И. Саккери (1667—1733 гг. н. э.), который решил, исходя из предложения, противоречащего 5-му постулату, развить геометрическую систему, отличную от евклидовой. Саккери думал, что эта система неизбежно придет к противоречию, чем и будет установлена истинность 5-го постулата. Но надежды Саккери не оправдались: обнаруженное им противоречие, как впоследствии выяснилось, было кажущимся, и вопрос о существовании такого противоречия остался открытым.

Очень большое влияние на все последующие работы по геометрии оказали исследования французского геометра Лежандра (1752—1833 гг.). Им был установлен целый ряд весьма важных предложений, связанных с 5-м постулатом, именно: 1. Сумма внутренних углов треугольника не может быть больше двух прямых углов. 2. Если у какого-нибудь треугольника сумма внутренних углов равна двум прямым, то и у всякого треугольника сумма внутренних углов равна двум прямым углам. Лежандру осталось доказать, что сумма внутренних углов треугольника не может быть меньше двух прямых углов, но здесь его постигла та же неудача, что и Саккери: приведенные им доказательства также оказались ошибочными, так как опирались на недоказанные предложения.

1. 6. Итак, в течение двух тысячелетий-виднейшие представители математической науки, будучи твердо убеждены в истинности 5-го постулата, тщетно пытались вывести

это предложение из совокупности остальных предложений геометрии. К началу XIX столетия имелось уже несколько десятков таких «доказательств», причем каждое из них являлось, в сущности, софизмом, заключающим в себе более или менее глубоко скрытую ошибку. Естественно возникает вопрос: а быть может, причина этих неудач коренится в самом существе дела? Быть может, 5-й постулат вообще невозможно доказать, опираясь на остальные постулаты и аксиомы геометрии? Но из этого тогда следовало бы, что возможна и другая система геометрии, в которой вместо 5-го постулата берется предложение, ему противоречащее.

Есть указание на то, что к этой мысли, по-видимому, впервые пришел один из величайших математиков своего времени К. Ф. Гаусс (1777—1855 гг.). Однако Гаусс нигде не опубликовал своих работ по этому вопросу.

Первым выступить с сообщением в печати об открытии новой — неевклидовой геометрии решился наш гениальный соотечественник — профессор и ректор Казанского университета Николай Иванович Лобачевский (1794—1856 гг.). О своем открытии он сообщил в докладе физико-математическому факультету Казанского университета 24 февраля (нового стиля) 1826 года. Позднее, начиная с 1829 года, он публикует по этому же вопросу ряд больших работ, сначала на русском языке, а потом основное содержание их переводит на французский и на немецкий языки.

В 1832 году появилась в печати работа венгерского математика — Яноша Бolyаи, который независимо от Н. И. Лобачевского также пришел к открытию неевклидовой геометрии.

На первых порах работы творцов неевклидовой геометрии были встречены одними с недоверием, другими — с издевательством и насмешками. И только начиная со второй половины XIX столетия исследования крупнейших ученых того времени показали, что неевклидова геометрия Лобачевского — Bolyаи является системой логически столь же безупречной и внутренне непротиворечивой, как и система Евклида.

Особенно большое впечатление произвела работа итальянского геометра Е. Бельями (1835—1900 гг.), который показал, что неевклидова планиметрия Лобачевского осуществляется на поверхности, называемой псевдосферой.

Из последующих работ необходимо указать исследования немецкого математика Б. Римана (1826—1866 гг.), построившего еще одну систему неевклидовой геометрии, в которой параллельных совсем не существует: любые две прямые имеют общую точку.

Наконец, уже на рубеже XIX и XX столетий трудами английского математика А. Кэли (1821—1895 гг.), немецкого математика Ф. Клейна (1849—1925 гг.), французского математика А. Пуанкаре (1854—1912 гг.) были построены системы геометрических образов, в которых осуществляются все предложения неевклидовой геометрии. Этим была окончательно доказана непротиворечивость этой геометрии и ее логическая равноправность с системой Евклида.

В последующих главах мы познакомимся с основными результатами этих работ.

Упражнения

Ниже приводится ряд «доказательств», каждое из которых содержит существенную ошибку. Предлагается эту ошибку найти и опровергнуть приведенное доказательство.

1. Докажем предложение, эквивалентное 5-му постулату: «Через точку, не принадлежащую данной прямой, можно к этой прямой провести одну и только одну параллельную»¹.

Пусть a — данная прямая, P — точка вне ее. Проведем через точку P перпендикуляр PQ к прямой a . Далее через точку P проводим прямую b перпендикулярно к прямой PQ . Прямые a и b параллельны, так как они перпендикулярны к одной и той же прямой PQ . Вместе с тем прямая b — единственная, так как через точку P к прямой a можно провести только один перпендикуляр.

2*. Докажем, что сумма внутренних углов любого треугольника равна 180° . Из этого предложения можно вывести аксиому параллельности.

Положим, что сумма внутренних углов любого треугольника равна x . Рассмотрим треугольник ABC (рис. 3) с углами α , β и γ . Согласно нашему обозначению, мы имеем: $\alpha + \beta + \gamma = x$. Проведя через вершину A секущую AM , разобьем треугольник ABC на два треугольника ABM и ACM , в каждом из которых сумма внутренних углов равна x . Следовательно, мы получим: $\angle 1 + \beta + \angle 3 = x$ и $\angle 2 + \gamma + \angle 4 = x$. Складывая почленно эти равенства, найдем:

$\angle 1 + \beta + \angle 3 + \angle 2 + \gamma + \angle 4 = 2x$. Но $\angle 1 + \angle 2 = \alpha$, $\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$ (как смежные), значит; $\alpha + \beta + \gamma + 180^\circ = 2x$. Но $\alpha + \beta + \gamma = x$, следовательно, $x + 180^\circ = 2x$, или $180^\circ = x$.

¹ В этой форме аксиома параллельности обычно приводится в школьных учебниках. Эта формулировка была дана английским геометром Плейфером (конец XVIII в.).

Итак, сумма внутренних углов любого треугольника равна 180° и поэтому аксиома параллельности доказана.

3. Докажем, наконец, совершенно невероятное предложение. Никакие две прямые не могут пересечься. Пусть мы имеем две, как угодно расположенные, прямые — a и b (рис. 4) и докажем, что они не имеют общей точки. Пересечем прямые a и b секущей AB так, чтобы внутренние односторонние углы α и β при точках A и B были равны:

$$\alpha = \beta.$$

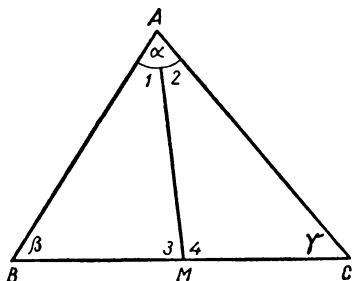


Рис. 3

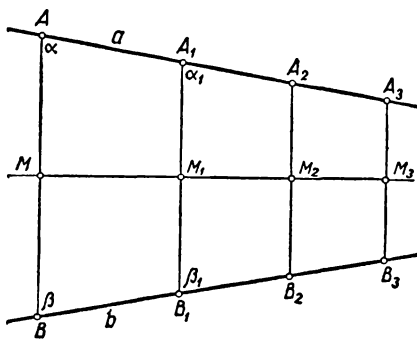


Рис. 4

Кроме того, положим, что $\alpha + \beta < 180^\circ$. Тогда точка пересечения прямых a и b не может находиться слева от прямой AB . Докажем, что она не может находиться и справа от AB . Обозначим через M середину отрезка AB и отложим на прямой a справа от точки A отрезок $AA_1 = AM$, а на прямой b справа от точки B отрезок $BB_1 = BM$. Точка пересечения прямых a и b не может попасть ни на отрезок AA_1 , ни на отрезок BB_1 , так как сторона равнобедренного треугольника не может быть ни меньше половины основания, ни равна ей.

В силу равенства углов $\alpha = \beta$ и отрезков $AA_1 = BB_1$ фигура ABB_1A_1 симметрична относительно перпендикуляра к прямой AB , проходящего через середину M . Поэтому внутренние односторонние углы α_1 и β_1 при точках A_1 и B_1 равны между собой и мы можем повторить это же построение и отложить $A_1A_2 = A_1M_1$ и $B_1B_2 = B_1M_1$ (M_1 — середина A_1B_1), причем точка пересечения прямых a и b не может оказаться ни на отрезке A_1A_2 , ни на отрезке B_1B_2 . Поэтому, неограниченно повторяя то же самое построение, мы никогда не дойдем до точки пересечения прямых a и b . Значит, эта точка не существует.

АБСОЛЮТНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

2. 1. Прежде чем приступить к построению системы неевклидовой геометрии, необходимо припомнить ряд основных предложений геометрии, не связанных с аксиомой параллельности. Совокупность таких предложений названа И. Больяи, одним из основоположников неевклидовой геометрии, абсолютной геометрией.

Мы будем рассматривать следующие виды геометрических предложений: определения, аксиомы, теоремы, следствия.

О п р е д е л е н и я (обозначим их символом **D** — от латинского слова *definitio* — определение). При помощи определения выделяется тот класс предметов, который мы будем обозначать данным словом. Каждое определение приводит определяемое понятие к более общему понятию. Например, говоря, что параллелограмм есть четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны, мы понятие «параллелограмм» определяем при помощи более общего понятия — «четырехугольник». При этом предполагается, что понятие «четырехугольник» было ранее определено при помощи еще более общего понятия, в данном случае понятия «многоугольник».

Так как такую цепь последовательных определений нельзя продолжать до бесконечности, то мы в конце концов останавливаемся на наиболее общих, широких понятиях, которые называются **о с н о в н ы м и**. Эти понятия принимаются без определения, причем предполагается, что соответствующие классы предметов нам хорошо знакомы.

А к с и о м ы¹ (сокращенное обозначение **A** — от греческого слова *ἀξιος* — достойный). Аксиомами мы называем предложения, принимаемые без доказательства. Система аксиом должна удовлетворять условиям: **н е п р о т и в о р е ч и в о с т и**, т. е. ни сами аксиомы, ни их следствия не должны противоречить друг другу; **н е з а в и с и м о с т и**, т. е. ни одна аксиома не должна быть следствием остальных аксиом; **п о л н о т ы**, т. е. любое

¹ В дальнейшем при обозначении аксиомы верхний индекс будет указывать номер группы, к которой принадлежит аксиома, а нижний индекс — порядковый номер аксиомы в данной группе.

предложение, относящееся к системе объектов, охватываемых аксиомами, должно быть либо доказано, либо опровергнуто при помощи выводов из этих аксиом.

Т е о р е м ы (сокращенное обозначение **Т** — от греческого слова θεωρημα — обдумываю) — предложения, истинность которых устанавливается путем доказательства.

С л е д с т в и я (сокращенное обозначение **С** — от латинского слова consequarium — следствие) — непосредственные выводы из предшествующих предложений.

2. 2. Основными понятиями геометрии являются:

Т о ч к и, которые мы будем всегда обозначать большими (заглавными) латинскими буквами: A, B, C, \dots

П р я м ы е, которые мы будем обозначать малыми (строчными) латинскими буквами: a, b, c, \dots

П л о с к о с т и, которые мы будем обозначать малыми греческими буквами: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Взаимоотношения между точками, прямыми и плоскостями описываются при помощи новых основных понятий, из которых в первую очередь рассматривается понятие **п р и н а д л е ж н о с т и**. Это понятие мы имеем в виду, когда говорим: «точка находится на прямой», «прямая проведена по плоскости», «точка лежит на плоскости» и т. д. Принадлежность мы будем обозначать знаком « \subset ». Например, запись $A \subset t$ обозначает: «точка A принадлежит прямой t ». Соотношения принадлежности описываются первой группой аксиом, которые называются **а к с и о м а м и с о с ч е т а н и я**.

$A_1^{(1)}$. Существует единственная прямая, проходящая через две данные точки.

$A_2^{(1)}$. Каждой прямой принадлежат по крайней мере две точки. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной и той же прямой.

$A_3^{(1)}$. Существует единственная плоскость, проходящая через три точки, не лежащие на одной и той же прямой. Каждой плоскости принадлежит по крайней мере одна точка.

$A_4^{(1)}$. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и все точки этой прямой принадлежат той же плоскости.

$A_5^{(1)}$. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют по крайней мере и еще одну общую точку.

$A_6^{(1)}$. Существуют по крайней мере четыре точки, не принадлежащие одной и той же плоскости.

Непосредственными следствиями этих аксиом являются предложения:

C_1 . Две различные прямые могут иметь не более одной общей точки ($A_1^{(1)}$).

C_2 . Две различные плоскости, имеющие одну общую точку, имеют одну и только одну общую прямую ($A_5^{(1)}$, $A_1^{(1)}$, $A_4^{(1)}$).

C_3 . Существует единственная плоскость, проходящая через данную прямую и не принадлежащую ей точку ($A_2^{(1)}$, $A_3^{(1)}$, $A_4^{(1)}$).

C_4 . Существует единственная плоскость, проходящая через две пересекающиеся прямые ($A_2^{(1)}$, $A_3^{(1)}$, $A_4^{(1)}$).

C_5 . На каждой плоскости существуют по крайней мере три прямые ($A_3^{(1)}$, $A_4^{(1)}$, $A_2^{(1)}$, $A_5^{(1)}$).

3. 1. Следующим основным понятием, определяющим взаимоотношения между точками, прямыми и плоскостями, есть соотношения порядка. Соответствующая, вторая, группа аксиом называется группой аксиом порядка. В качестве основного здесь берется понятие «предшествовать» (знак « \rightarrow »).

$A_1^{(2)}$. Для двух различных точек прямой существует одно и только одно из двух соотношений: либо $A \rightarrow B$, либо $B \rightarrow A$. Если $A \rightarrow B$, то говорят, что B «следует за A » (знак: $B \prec A$). Если $A \rightarrow B$, то $B \prec A$.

$A_2^{(2)}$. Если A , B и C — точки одной и той же прямой и если $A \rightarrow B$ и $B \rightarrow C$, то $A \rightarrow C$.

D_1 . Если $A \rightarrow B$, $B \rightarrow C$, то говорят, что B лежит «между» A и C .

$A_3^{(2)}$. Между любыми двумя точками прямой всегда лежит точка той же прямой.

Отсюда следует:

C_1 . Между любыми двумя точками прямой существует бесконечное множество точек той же прямой.

D_2 . Часть прямой, содержащая те и только те точки, которые лежат между двумя данными точками, включая и эти точки, называется отрезком. Отрезок, определяемый точками A и B , обозначается так: \overline{AB} .

$A_4^{(2)}$. Если A и B — различные точки прямой и $A \rightarrow B$, то существует точка, предшествующая A , и существует точка, следующая за B .

C_2 . Существует бесконечное множество точек прямой, предшествующих данной точке, а также — бесконечное множество точек, следующих за данной точкой.

Д₃. Часть прямой, содержащая те и только те точки, которые предшествуют данной (или следуют за данной), включая и данную точку, называется *лучом* или *полупрямой*.

С₃. На плоскости существует бесконечное множество точек и прямых.

С₄. В пространстве существует бесконечное множество точек, прямых и плоскостей.

Расположение точек и прямых на плоскости определяется следующей аксиомой.

А₅⁽²⁾. Каждая прямая в плоскости делит множество всех не принадлежащих ей точек плоскости на две части (два *подмножества*), обладающие свойствами: 1) каждая точка, не принадлежащая данной прямой, принадлежит одному и только одному из этих подмножеств; 2) если две точки принадлежат одному и тому же подмножеству, то они определяют отрезок, не пересекающий данную прямую; 3) если две точки принадлежат разным подмножествам, то они определяют отрезок, пересекающий эту прямую (рис. 5).

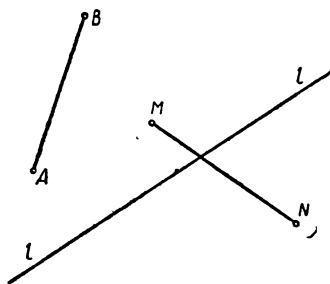


Рис. 5

Д₄. Часть плоскости, содержащая все точки только одного из подмножеств, определяемых данной прямой, называется *полуплоскостью*, а данная прямая — ее *ребром*.

Далее дается определение угла как части плоскости, ограниченной двумя лучами с общим началом, и многоугольника как части плоскости, ограниченной замкнутой ломаной линией. В частности, определяется треугольник и его элементы — стороны и углы.

2. 4. Следующим важным соотношением между геометрическими образами после соотношений принадлежности и порядка является соотношение *геометрического равенства*, или *конгруэнтности*.

В школьных курсах геометрии равными называются такие фигуры, которые при наложении совмещаются всеми своими точками. Для того чтобы этим определением можно

было пользоваться при более строгом изложении геометрии, мы должны были бы построить систему аксиом, которая позволила бы нам точно установить свойства процесса «наложения» (или «движения») фигуры, как это было сделано в аксиомах сочетания и в аксиомах порядка. Чтобы осуществить это, мы будем в дальнейшем пользоваться одним из наиболее важных и общих понятий современной геометрии — понятием преобразования.

Геометрическим преобразованием называется всякая операция, позволяющая по данной геометрической фигуре (образу) находить другую геометрическую фигуру (образ). При этом предполагается, что между прообразами и образами существует взаимно однозначное соответствие, т. е. из каждого прообраза получается один и только один образ, а каждому образу соответствует один и только один прообраз, из которого этот образ получился.

Если фигура преобразуется сама в себя, то она называется неподвижной фигурой преобразования. Если все фигуры остаются неподвижными, то преобразование называется тождественным.

В геометрии особенно большую роль играют точечные преобразования, при которых точка преобразуется в точку. Например, когда мы по данному треугольнику ABC построим равный ему треугольник $A'B'C'$, то этим будет определено точечное преобразование, в котором точка A преобразовалась в A' , B в B' , C в C' , середина \overline{BC} преобразуется в середину $\overline{B'C'}$, центр окружности, вписанной в первый треугольник, в центр окружности, вписанной во второй треугольник, и т. д.

Простейшим точечным преобразованием, при помощи которого можно обосновать понятие движения и конгруэнтности, является осевая симметрия.

Наглядное представление об осевой симметрии можно дать следующим образом. Возьмем лист бумаги, проведем на нем прямую и сложим этот лист по прямой так, чтобы одна полуплоскость совместилась с другой полуплоскостью. При этом каждая точка одной полуплоскости совпадет с одной и только одной точкой другой полуплоскости. Этим обуславливается взаимно однозначное соответствие между точками двух полуплоскостей. Очевидно, точки самой прямой остаются неподвижными. Данная прямая называется осью симметрии, а точки,

соответствующие друг другу, взаимно симметричными.

Если все точки двух фигур взаимно симметричны относительно некоторой оси, то и сами фигуры называются взаимно симметричными относительно этой оси. Фигура, состоящая из двух взаимно симметричных половин, называется симметричной.

На рисунке 6 показана симметричная фигура, полученная путем сгибания листа бумаги, на которой была предварительно нанесена чернильная клякса. На рисунке 7 показана симметричная фигура, полученная вырезыванием сложенного вдвое листа бумаги.

Фигуру, симметричную с данной, можно также получить, поставив

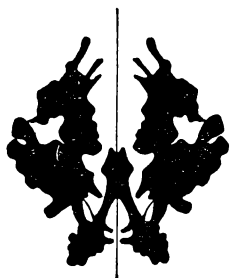


Рис. 6

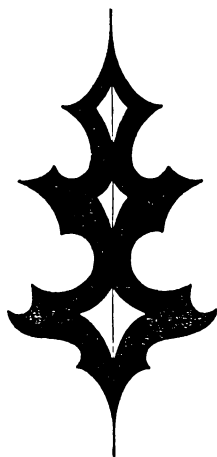


Рис. 7

плоское зеркало перпендикулярно к листу бумаги, на котором изображена фигура. Тогда отражение в зеркале даст фигуру, симметричную данной. Поэтому осевая симметрия называется также отражением от прямой.

С точки зрения школьного определения равенства взаимно симметричные фигуры равны между собой, так как они при наложении совмещаются друг с другом всеми своими точками. Однако равенство симметричных между собой фигур имеет одну существенную особенность. Рассмотрим взаимно симметричные треугольники ABC и $A'B'C'$ (рис. 8). Если будем двигаться по контуру треугольника ABC от точки A к точке B , от B к C , от C к A , то мы убедимся, что это движение совершается в направлении, проти-

воположном движению стрелки часов. Двигаясь же по контуру треугольника $A'B'C'$ от A' к B' , от B' к C' и от C' к A' , мы убедимся, что это движение совершается в направлении движения часовой стрелки. Треугольники ABC и $A'B'C'$ нельзя совместить друг с другом движением

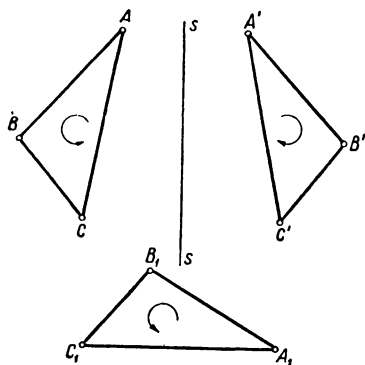


Рис. 8

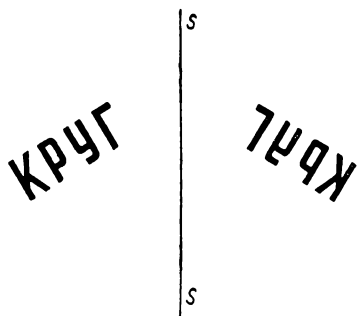


Рис. 9

по плоскости; для их совмещения нужно один из треугольников вынести из плоскости в пространство, перевернуть его на другую сторону и уже после этого наложить его на другой.

Различие в ориентировке взаимно симметричных фигур наглядно показано на рисунке 9.

Фигуры, которые совмещаются движением по плоскости, называются равными и одинаково ориентированными (например, $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ на рис. 8). Фигуры, которые можно совместить, только перевернув одну из них на другую сторону, называются равными, но противоположно ориентированными (как $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ на рис. 8).

2. 5. Все эти весьма простые и наглядные свойства осевой симметрии легко оформить в виде третьей группы системы аксиом.

$A_1^{(3)}$. Каждая прямая в плоскости определяет преобразование симметрии, при котором точки одной полуплоскости взаимно отображаются на точки другой полуплоскости, причем точки самой прямой остаются неподвижными.

$A_2^{(3)}$. При преобразовании симметрии точки, лежащие

на одной и той же прямой, преобразуются в точки, также лежащие на одной и той же прямой, причем сохраняется порядок точек, т. е. если для точек A, B и C мы имели $A \rightarrow B \rightarrow C$, то и для соответственных точек будем иметь: $A' \rightarrow B' \rightarrow C'$.

$A_3^{(3)}$. Две различные точки плоскости определяют единственную прямую этой плоскости, относительно которой они преобразуются друг в друга.

$A_4^{(3)}$. Два луча с общей вершиной определяют единственную прямую (в плоскости этих лучей), относительно которой они преобразуются друг в друга.

D_1 . Преобразование, определяемое третьей группой аксиом, называется *осевой симметрией*, прямая — *осью симметрии*, а две точки, взаимно преобразующиеся друг в друга, — *взаимно симметричными*.

Символически преобразование осевой симметрии записывается так: $s(A) \equiv A'$, что означает: ось s преобразует точку A в A' . Аналогично $s(a) \equiv a'$, т. е. ось преобразует прямую a в a' ¹.

$A_5^{(3)}$. Если две взаимно симметричные фигуры преобразуются в две новые фигуры относительно новой оси симметрии, то полученные фигуры будут взаимно симметричны относительно прямой, в которую преобразуется прежняя ось симметрии.

Например, если $s(A) \equiv A'$; $l(s) \equiv s'$; $l(A) \equiv A_1$, $l(A_1') \equiv A_1'$, то $s'(A_1) \equiv A_1'$ (рис. 10).

Непосредственно из этих аксиом вытекает ряд следствий.

Из взаимности отображения в осевой симметрии ($A_1^{(3)}$) следует:

C_1 . Если $s(A) \equiv A'$, то и $s(A') \equiv A$. И также: если $s(a) \equiv a'$, то и $s(a') \equiv a$.

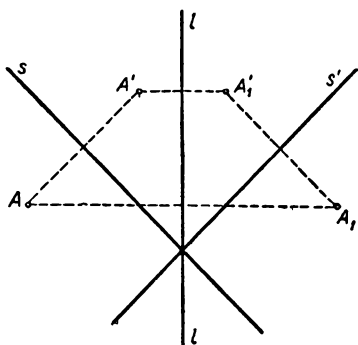


Рис- 10

¹ Знак « \equiv » есть знак тождества. Он обозначает, что символ, находящийся слева, определяет тот же самый предмет, что и символ, находящийся справа.

C_2 . Неподвижными точками преобразования являются только точки оси, так как все остальные точки переходят из одной полуплоскости в другую: если $M \subset s$, то $s(M) \equiv M$. Обратно: если $s(M) \equiv M$, то $M \subset s$.

C_3 . Точка пересечения двух взаимно симметричных прямых неподвижна, т. е. принадлежит оси. Пусть $s(a) \equiv a'$;

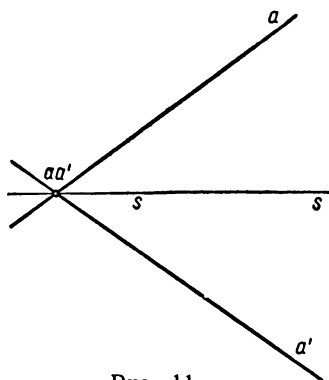


Рис. 11

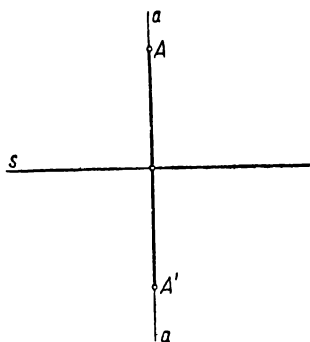


Рис. 12

обозначим через aa' точку пересечения прямых a и a' . Тогда $s(aa') \equiv a'a$. Но $aa' \equiv a'a$. Поэтому $aa' \subset s$ (рис. 11).

C_4 . Прямая, проходящая через две взаимно симметричные точки, преобразуется сама в себя, т. е. является неподвижной прямой. Положим $s(A) \equiv A'$, тогда $s(AA') \equiv A'A$, но $AA' \equiv A'A$, поэтому AA' есть неподвижная прямая (рис. 12).

D_1 . Если симметрия с осью s преобразует прямую a в самое себя, то a называется перпендикуляром к прямой s : $a \perp s$.

C_5 . Перпендикулярность есть свойство взаимное, т. е. если $a \perp s$, то и $s \perp a$. Пусть $s(A) \equiv A'$ (рис. 12), $a \equiv AA'$, поэтому $a \perp s$.

Примем прямую a за ось новой симметрии и тогда: $a(A) \equiv A$, $a(A') \equiv A'$ (на основании C_2); $a(s) \equiv s'$, но на основании $A_5^{(3)}$ имеем: $s'(A) \equiv A'$, а в силу $A_3^{(3)}$ получим: $s' \equiv s$. Значит, s останется неподвижной при новом преобразовании. Поэтому $s \perp a$.

T_1 . Через данную точку к данной прямой можно провести один и только один перпендикуляр.

Если данная точка A находится вне данной прямой s (рис. 12), то имеем: $s(A) \equiv A'$ и $a \equiv AA'$ будет перпен-

дикуляром к s . Единственность перпендикуляра следует из того, что точке A соответствует одна и только одна симметричная с ней точка.

Если данная точка O находится на данной прямой a (рис. 13), то O является общей вершиной двух лучей, на которые она разделяет прямую a . Согласно $A_4^{(3)}$, существует единственная ось симметрии s , преобразующая эти лучи друг в друга. Но, очевидно, эта же самая симметрия преобразует a в самое себя. Поэтому $a \perp s$ или, что все равно, $s \perp a$.

Из взаимности преобразования получаются еще два следствия.

C_6 . Две пары взаимно симметричных точек определяют две пары взаимно симметричных прямых. Если $s(A) \equiv A'$, $s(B) \equiv B'$, то $s(AB) \equiv A'B'$ и $s(AB') \equiv A'B$ (рис. 14).

C_7 . Две пары взаимно симметричных прямых пересе-

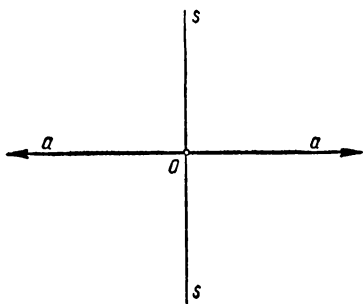


Рис. 13

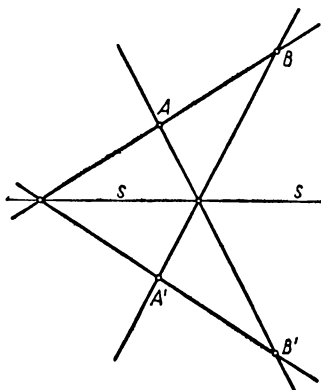


Рис. 14

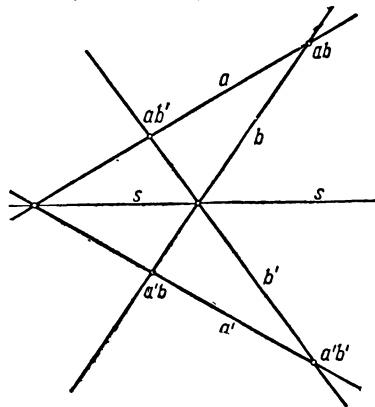


Рис. 15

каются в двух парах взаимно симметричных точек. Если $s(a) \equiv a'$, $s(b) \equiv b'$, то $s(ab) \equiv a'b'$ и $s(a'b') \equiv a'b$ (рис. 15).

Упражнения

1. Доказать, что если дана ось и две взаимно симметричные относительно этой оси точки, то точку, симметричную с любой данной точкой, можно построить при помощи только линейки.

2. Доказать, что при тех же условиях, какие даны в предыдущей задаче, можно при помощи только линейки провести прямую, симметричную с любой данной прямой.

3. Доказать, что две прямые, перпендикулярные к одной и той же прямой, не пересекаются друг с другом.

4. Известно, что упругий шар при ударе о неподвижную плоскую стенку движется после удара по прямой, симметричной (относительно стенки) с той прямой, по которой он двигался до удара. На бильярде лежат шары A и B . В каком направлении нужно ударить шар A , чтобы после отражения от борта он попал в шар B ?

5. На бильярде находятся шары A и B . В каком направлении нужно ударить шар A , чтобы после отражения от двух бортов он (угол между бортами произвольный) попал в шар B ?

6. Шар P лежит на четырехугольном бильярде. В каком направлении нужно его ударить, чтобы после отражения от четырех бортов он попал в исходное положение?

Глава 3

АБСОЛЮТНАЯ ГЕОМЕТРИЯ (продолжение)

3. 1. Установленные в предыдущей главе свойства осевой симметрии позволяют определить понятие геометрического равенства (конгруэнтности).

D_1 . *Две фигуры называются собственно конгруэнтными, если одна преобразуется в другую при помощи четного числа осевых симметрий. Две фигуры называются не собственно конгруэнтными, если одна преобразуется в другую при помощи нечетного числа осевых симметрий.* Конгруэнтность фигур обозначается знаком равенства: $=$.

T_1 . *Соотношение конгруэнтности удовлетворяет условиям: 1) симметрии — если первая фигура равна второй, то и вторая равна первой; 2) рефлексивности — всякая фигура равна самой себе; 3) транзитивности — если первая фигура равна второй, а вторая равна третьей, то первая равна третьей.*

Если фигуру обозначить буквой Φ , то условие теоремы можно записать так: 1) Если $\Phi_1 = \Phi_2$, то $\Phi_2 = \Phi_1$. 2) $\Phi = \Phi$. 3) Если $\Phi_1 = \Phi_2$, $\Phi_2 = \Phi_3$, то $\Phi_1 = \Phi_3$.

Заметим, что эти три условия вместе называются условиями эквивалентности.

Доказательство теоремы непосредственно следует из определения.

1) Если $\Phi_1 = \Phi_2$, то существует ряд осевых симметрий, преобразующих первую фигуру во вторую. Произведя эти симметрии в обратном порядке, мы преобразуем вторую фигуру в первую. Значит, $\Phi_2 = \Phi_1$.

2) Если фигуру Φ осевой симметрией преобразовать в Φ' и еще раз повторить эту симметрию, то Φ' обратно преобразуется в Φ . Значит, $\Phi = \Phi$.

3) Если $\Phi_1 = \Phi_2$ и $\Phi_2 = \Phi_3$, то, произведя последовательно весь ряд симметрий, осуществляющих сначала первое равенство, потом второе, мы этим самым преобразуем первую фигуру в третью. Значит, $\Phi_1 = \Phi_3$.

Д₂. Преобразование, которое приводится к ряду последовательных осевых симметрий, число которых четное, называется собственным движением. Преобразование, которое приводится к ряду последовательных осевых симметрий, число которых нечетное, называется несобственным движением.

Т₂. Собственное движение не изменяет ориентировку фигуры, несобственное движение меняет ориентировку фигуры на обратную.

Для доказательства возьмем точки M и N на оси симметрии s и пусть $s(A) \equiv A'$ (рис. 16). Тогда если луч MA лежит в левой полуплоскости относительно луча MN , то луч MA' лежит в правой полуплоскости относительно того же луча MN . Одновременно луч MN лежит в правой полуплоскости луча MA и в левой полуплоскости луча MA' . Отсюда следует, что точка P , лежащая слева от луча MA , преобразуется в точку P' , лежащую справа от луча MA' .

В частности, если в треугольнике ABC (рис. 8) точка лежала слева от луча BC , то в симметричном треугольнике

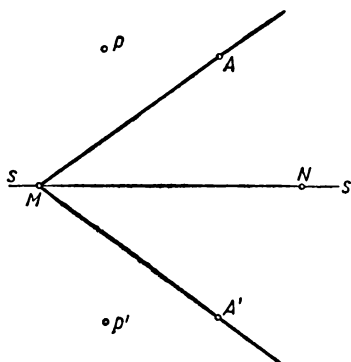


Рис. 16

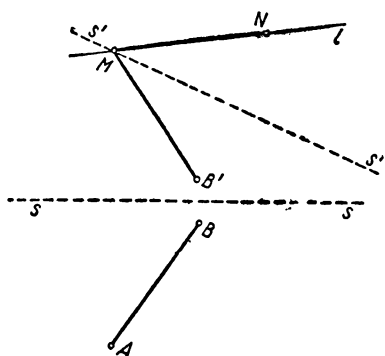


Рис. 17

$A'B'C'$ точка A' лежит справа от луча $B'C'$. Итак, одна осевая симметрия меняет ориентировку фигуры. Вторая осевая симметрия вернет фигуру к первоначальной ориентировке. Поэтому четное число симметрий не меняет ориентировку, а нечетное меняет.

3. 2. При помощи движения каждую фигуру на плоскости можно переместить в любое место на этой плоскости.

В частности, существует бесконечное множество движений, позволяющих данный отрезок \overline{AB} преобразовать в отрезок, расположенный на данной прямой l в данном направлении от данной точки M . На рисунке 17 показано наименьшее число осевых симметрий, преобразующих отрезок \overline{AB} в отрезок \overline{MN} на прямой l : симметрия с осью s преобразует точку A в точку M ($A_3^{(3)}$) и точку B — в B' ; далее симметрия с осью s' преобразует луч MB' в луч MI ($A_4^{(3)}$) и точку B' в точку N . Однако можно было бы сначала преобразовать точку B в точку M и полученный отрезок новой симметрией преобразовать в отрезок прямой l с тем же направлением. Можно было бы сначала произвольной симметрией преобразовать отрезок \overline{AB} в $\overline{A'B'}$ и потом уже указанным преобразованием перенести на прямую l . Возникает вопрос: совпадут ли между собой полученные отрезки? Другими словами, если один конец отрезка преобразуется в точку M , то преобразуется или нет другой его конец в точку N ? Опыт дает на это утвердительный ответ. Отсюда мы получаем последнюю аксиому третьей группы:

$A_6^{(3)}$. Преобразуя движениями данный отрезок в новый отрезок, расположенный в данном направлении от данной точки на данной прямой, мы всегда получим один и тот же отрезок.

Из этой аксиомы мы заключаем, что любое движение взаимно однозначно преобразует данный отрезок в равный ему отрезок, чем обуславливается возможность производить различные операции над отрезками: сравнивать

их по величине, складывать и вычитать, умножать на целое число (т. е. повторять слагаемым несколько раз). На основании $A_3^{(3)}$ мы можем находить единственную середину отрезка и, значит, имеется возможность разделить отрезок на 2, 4, 8 и вообще на 2^n равных частей.

Из $A_4^{(3)}$ следует, что существует единственный луч (биссектриса), делящий угол на две равные части. А из аксиомы $A_6^{(3)}$ получаем:

C_1 . Если на сторонах угла от его вершины отложить два равных между собой отрезка, то их концы будут симметричны относительно биссектрисы этого угла. Например, на рисунке 18 имеем: $s(a) \equiv a'$; $\overline{OP} = \overline{OP'}$, поэтому $s(P) \equiv P'$.

3. 3. Наиболее важным предложением в теории осевой симметрии является следующая теорема.

T_1 . Ось симметрии есть геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от двух взаимно симметричных точек.

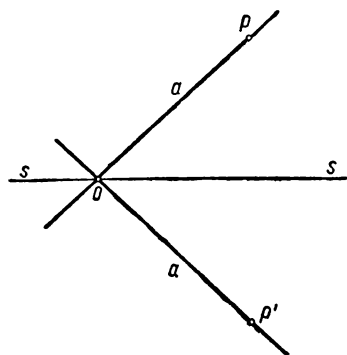


Рис. 18

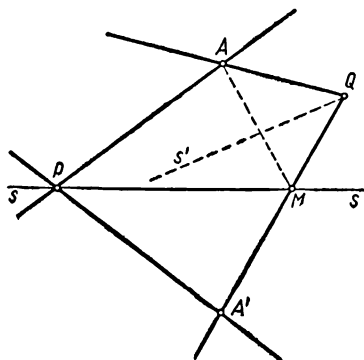


Рис. 19

Напомним, что геометрическим местом называется совокупность тех и только тех точек, которые обладают данным свойством.

Положим, что мы имеем $s(A) \equiv A'$ (рис. 19). Возьмем точку P на оси s . По определению конгруэнтности, $\overline{PA} = \overline{PA'}$, значит, все точки оси s равноудалены от точек A и A' . Возьмем точку Q вне оси s и положим, что $\overline{QA} =$

$= \overline{QA'}$. Проведем ось s' симметрии лучей QA и QA' . Согласно $C_1 s' (A) \equiv A'$, и мы получили, что точки A и A' определяют две различные оси симметрии, относительно которых они преобразуются друг в друга. Но это противоречит $A_3^{(3)}$. Поэтому $\overline{QA} \neq \overline{QA'}$ и, значит, только точки оси s равноудалены от A и A' .

Вторым важным предложением является теорема о преобразовании двух конгруэнтных фигур друг в друга.

Т₂. Две собственно конгруэнтные фигуры преобразуются друг в друга при помощи двух осевых симметрий.

Пусть мы имеем фигуру Φ с точками A, B, C, D, \dots и конгруэнтную ей фигуру Φ' с соответствующими точками A', B', C', D', \dots

Произведем две осевые симметрии, преобразующие отрезок $\overline{A'B'}$ в отрезок \overline{AB} , как это сделано в начале п. 3.2. Ввиду того что фигуры одинаково ориентированы, точка C_1 , в которую преобразуется точка C' , будет находиться в такой же полуплоскости относительно прямой AB , в какой находится и точка C . Докажем, что $C_1 \equiv C$. Допустим обратное: положим, что C_1 не совпадает с C . Тогда по условию теоремы будем иметь: $\overline{AC} = \overline{AC_1}$ и $\overline{BC} = \overline{BC_1}$. По предыдущей теореме отсюда следует, что ось s симметрии точек C и C_1 пройдет и через точку A и через точку B , т. е. $s \equiv AB$. Но этого не может быть, так как взаимно симметричные точки C и C_1 должны лежать по разные стороны от s , т. е. от AB , а мы установили, что они лежат по одну сторону от AB . Итак, $C_1 \equiv C$. Таким же путем докажем, что и точка D преобразуется в D' и т. д. Вместе с тем в силу $A_6^{(3)}$ все точки прямой $A'B'$ преобразуются в соответствующие точки прямой AB . Итак, каждая точка фигуры Φ' преобразуется в соответствующую точку фигуры Φ .

Из этой теоремы получаем ряд следствий.

С₁. Две несобственно конгруэнтные фигуры преобразуются друг в друга одной или тремя осевыми симметриями.

Положим сначала, что фигуры Φ с точками A, B, C, \dots и Φ' с соответствующими точками A', B', C', \dots таковы, что $A' \equiv A$. Тогда ось s симметрии точек B и B' проходит через точку A (так как $\overline{AB} = \overline{AB'}$).

Эта симметрия преобразует фигуру Φ' в фигуру, одинаково ориентированную с Φ , причем отрезок $\overline{AB'}$ преобразуется в \overline{AB} . Отсюда, на основании предыдущей теоремы,

убедимся, что и все точки фигуры Φ' преобразуются в соответствующие точки фигуры Φ .

Если же фигуры не имеют совпадающих соответственных точек, то произвольной осевой симметрией преобразуем Φ' в фигуру, собственно конгруэнтную с Φ . После этого двумя преобразованиями, как в T_2 , мы преобразуем ее в Φ .

C_2 . Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого, то такие треугольники конгруэнтны между собой. Для доказательства достаточно повторить все рассуждения, которыми пользовались в T_2 , когда точки A', B', C' , не лежащие на одной и той же прямой, преобразуются соответственно в точки A, B и C при условии, что $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$.

C_3 . Любые две собственно или несобственно конгруэнтные между собой фигуры преобразуются друг в друга соответственно собственным или несобственным движением, причем собственное движение всегда можно заменить двумя симметриями, а несобственное — тремя (иногда одной).

Смысл этого следствия заключается в том, что если одна фигура была получена из другой путем движения, то существует также бесконечное множество движений того же типа, преобразующих одну из этих фигур в другую.

В частности, это предложение можно применить к углам и тогда мы получим тот же самый вывод, какой мы получили по отношению к отрезкам: при помощи движения мы можем производить сравнение углов, сложение и вычитание углов, умножение угла на целое число. А из аксиомы $A_4^{(3)}$ мы имеем также, что любой угол мы можем разделить на 2^n равных частей.

Далее мы можем получить предложение о том, что сумма смежных углов равна развернутому и что вертикальные углы равны между собой.

3. 4. Ряд полученных нами предложений позволяет легко изложить все основные предложения абсолютной геометрии. В первую очередь можно установить остальные признаки равенства треугольников: по двум сторонам и углу между ними и по стороне и двум прилежащим углам. И в том и в другом случае достаточно произвести движение, преобразующее сторону одного из треугольников в соответственную равную ей сторону другого треугольника, и

показать, что после этого и все остальные элементы треугольников преобразуются друг в друга. Доказательство по существу, остается таким же, какое применяется обычно в курсах элементарной геометрии.

Для дальнейшего изложения нам понадобится предложение о внешнем угле треугольника. Напомним его формулировку и доказательство.

Т₁. *Внешний угол треугольника больше всякого внутреннего, не смежного с ним.*

Рассмотрим треугольник ABC (рис. 20). Продолжим сторону BC за точку C и получим внешний угол ACE .

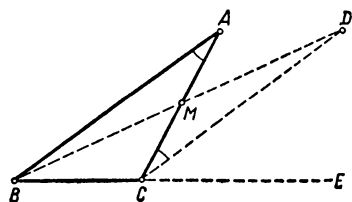


Рис. 20

Через середину M стороны AC проведем медиану BM и продолжим ее на такое же расстояние до точки D . Точка D находится внутри угла ACE , так как луч BD пересекает сторону AC этого угла, а вторую сторону, т. е. CE , он пересечь не может, так как его вершина B лежит на луче CB , противоположном лучу CE .

Соединив точку D с вершиной C , получим: $\triangle CDM = \triangle ABM$, так как $\overline{DM} = \overline{BM}$, $\overline{CM} = \overline{AM}$ и $\angle CMD = \angle AMB$.

Следовательно, $\angle BAM = \angle DCM$, но $\angle DCM$ есть часть угла ACE , поэтому $\angle BAC < \angle ACE$.

Отсюда мы получаем предложения о соотношениях между сторонами и углами треугольника.

С₁. *В треугольнике против равных сторон лежат равные углы. Против большей стороны лежит и больший угол.*

Для доказательства того и другого случая проводим ось симметрии s угла при вершине A (рис. 21). В первом случае имеем: $\overline{AB} = \overline{AC}$ и потому $s(C) \equiv B$ и, значит, $\angle B = \angle C$. Во втором случае $\overline{AC} > \overline{AB}$, $s(B) \equiv B'$ и так как $\overline{AB} = \overline{AB'}$, то точка B' будет лежать на стороне \overline{AC} . В треугольнике $CB'M$ угол $AB'M$ внешний и, значит, $\angle AB'M > \angle C$, но в силу симметрии $\angle AB'M = \angle B$. Итак, $\angle B > \angle C$.

Обратное предложение легко доказать от противного.

Следующее предложение является одним из наиболее важных в абсолютной геометрии.

Т₂. *Всякая сторона треугольника меньше суммы и больше разности двух других сторон.*

Соотношение, выраженное этой теоремой, иногда называется неравенством треугольника.

Для доказательства проведем ось s симметрии внешнего угла при вершине C в треугольнике ABC . Пусть $s(B) \equiv B'$, поэтому $\overline{CB} = \overline{CB'}$ и в треугольнике ABB' сторона $\overline{AB'} = \overline{AC} + \overline{CB}$ (рис. 22). Вместе с тем $\angle B' < \angle ABB'$, так как $\angle B' = \angle CBB'$ — части угла ABB' . Поэтому (на основании предложения, обратного предыдущему следствию) $\overline{AB'} > \overline{AB}$, или $\overline{AC} + \overline{CB} > \overline{AB}$.

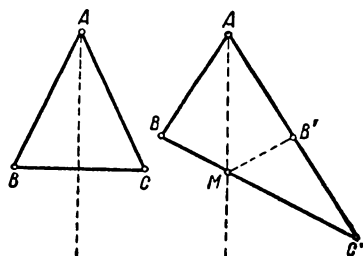


Рис. 21

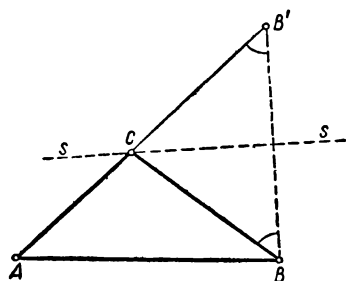


Рис. 22

Так как эти же рассуждения можно применить к любой стороне треугольника, то получим:

$\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AC}$, или, перенеся \overline{BC} в правую часть:
 $\overline{AB} > \overline{AC} - \overline{BC}$ (предполагая, что $\overline{BC} < \overline{AC}$).

Непосредственно отсюда находим:

С₂. *Если точка не лежит на оси симметрии, то она ближе к той из двух взаимно симметричных точек, с которой она лежит в одной полуплоскости.* Справедливость этого легко видеть из того же рисунка 22.

3. 5. Обобщением и следствием неравенства треугольника служат предложения о том, что периметр ломаной линии больше отрезка, соединяющего его концы, и о том, что периметр выпуклой ломаной меньше периметра любой объемлющей ломаной.

Далее отсюда же получаются предложения о перпендикуляре и наклонных:

Т₁. *Если из точки вне прямой провести к ней перпендикуляр и наклонные, то:*

- 1) перпендикуляр короче всякой наклонной;
- 2) наклонные, имеющие равные проекции, равны между собой;

3) если проекции наклонных не равны, то большей проекции соответствует и большая наклонная.

Доказательство этой теоремы можно провести на одном и том же чертеже (рис. 23), где s — данная прямая, P — данная точка, $s(P) \equiv P'$.

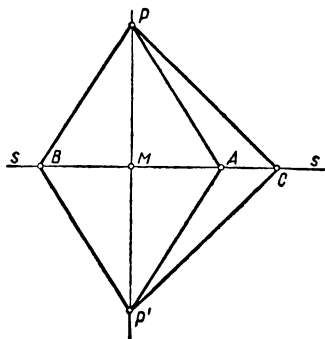


Рис. 23

1) Из треугольника $PA P'$ имеем $\overline{AP} + \overline{AP'} > \overline{PP'}$, но $\overline{AP} + \overline{AP'} = 2\overline{AP}$, $\overline{PP'} = 2\overline{PM}$. Поэтому $2\overline{AP} > 2\overline{PM}$ и, значит, $\overline{PM} < \overline{AP}$. 2) Так как $\overline{BM} = \overline{AM}$, $\overline{PP'} \perp \overline{AB}$, то $\overline{PP'}$ есть ось симметрии точек A и B и, значит, $\overline{AP} = \overline{BP}$. 3) Если $\overline{AM} < \overline{CM}$, то ломаная PCP' объемлет выпуклую ломаную $PA P'$, поэтому $\overline{PC} + \overline{P'C} > \overline{PA} + \overline{P'A'}$, т. е. $\frac{2\overline{PC}}{2} > \frac{2\overline{PA}}{2}$ и, значит, $\overline{PC} > \overline{PA}$.

Предложение, обратное этой теореме, легко доказывается методом от противного.

Доказанная теорема позволяет дать определение расстояния от точки до прямой, а отсюда предложение о том, что биссектриса выпуклого угла (т. е. угла, меньшего развернутого) есть геометрическое место его внутренних точек, одинаково удаленных от его сторон.

3. 6. Во всем предыдущем изложении у нас не возникал вопрос об инструментах, при помощи которых осуществляются построения и преобразования фигур. Для наших целей достаточно было иметь лист бумаги, являющийся моделью плоскости, карандаш для изображения точек и линий и линейку для проведения прямых. Преобразование осевой симметрии можно было бы осуществить при помощи складывания листа бумаги и этим самым проверить справедливость аксиом третьей группы. Однако уже такая операция, как перенесение отрезка, требует для своего осуществления двух осевых симметрий. Поэтому для об-

легчения построений мы пользуемся специальными инструментами: для перенесения отрезков мы пользуемся циркулем (с двумя острыми ножками), для перенесения углов — малкой (две тонкие линейки, скрепленные в одном конце шарниром — рис. 24).

В связи с применением циркуля появляется возможность построения окружности — геометрического места точек плоскости, расстояния которых от данной постоянной точки равно данному отрезку.

Иначе говоря, окружность есть геометрическое место точек, симметричных данной точке по отношению к любой

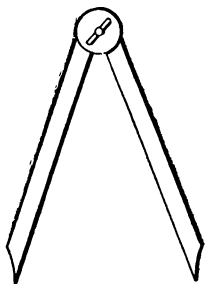


Рис. 24

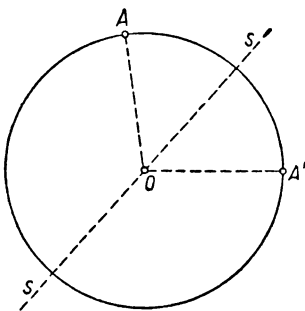


Рис. 25

прямой, проходящей через центр (рис. 25). Отсюда следует, что окружность симметрична относительно всякой прямой, проходящей через ее центр.

При помощи симметрии окружности можно доказать все предложения, которыми выражаются соотношения между дугами, хордами и центральными углами в одной и той же окружности.

3. 7. Построения, осуществляемые при помощи линейки и циркуля, приводят к постановке целого ряда вопросов и в первую очередь к вопросам о возможности выполнения того или другого построения. Эти проблемы, а также и задачи, связанные с процессом измерения геометрических величин, приводят к новой, четвертой группе аксиом абсолютной геометрии — к аксиомам непрерывности. Аксиомы эти следующие:

$A_1^{(4)}$. (Аксиома Архимеда.) Если даны два не равных между собой отрезка, то, беря меньший из них слагаемым достаточное число раз, мы всегда можем получить в сумме

отрезок, *бóльший бóльшего отрезка*. Если \bar{a} и \bar{b} — данные отрезки и $\bar{b} < \bar{a}$, то существует такое целое число n , при котором $n\bar{b} > \bar{a}$. Аксиома Архимеда говорит о том, что, двигаясь по прямой равными шагами в данном направлении, мы всегда можем достичь и перешагнуть любую точку, лежащую в том же направлении. Из аксиомы Архимеда также следует, что, деля на равные части какой-нибудь отрезок, мы при достаточно большом числе равных долей можем получить отрезок меньше любого наперед данного отрезка.

$A_2^{(4)}$. (Аксиома Г. Кантора.)¹ Если на прямой имеется бесконечная система отрезков, в которой каждый последующий находится внутри предыдущего, причём на прямой нет

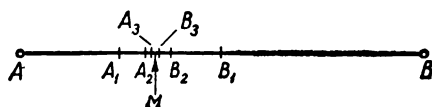


Рис. 26

отрезка, который лежал бы внутри всех отрезков системы, то существует единственная точка, принадлежащая всем этим отрезкам.

Поясним эту аксиому таким примером. Мы умеем делить отрезок на 2, 4, 8, ... и вообще на 2^n равных частей, но $\frac{1}{3}$ отрезка мы найти не умеем. Попробуем найти ее, пользуясь последовательными приближениями и опираясь на аксиому Кантора.

Возьмем отрезок \overline{AB} (рис. 26) и обозначим через M искомую точку, определяющую конец отрезка \overline{AM} , равного одной трети \overline{AB} . Возьмем B_1 — середину отрезка \overline{AB} и A_1 — середину $\overline{AB_1}$.

Очевидно, $\overline{A_1B_1} = \frac{1}{4}\overline{AB}$ и вместе с тем точка M должна лежать на отрезке $\overline{A_1B_1}$, так как $\frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$. Точка

¹ Г. К а н т о р (Georg Cantor, 1845 — 1919) — немецкий математик, один из основоположников современной теории множеств.

M определит и $\frac{1}{3}$ отрезка $\overline{A_1B_1}$, так как $\frac{1}{3}\overline{AB} - \frac{1}{4}\overline{AB} = \frac{1}{12}\overline{AB} = \frac{1}{3}\overline{A_1B_1}$. Далее находим B_2 — середину $\overline{A_1B_1}$ и A_2 — середину $\overline{A_1B_2}$. Мы получим отрезок $\overline{A_2B_2}$, равный $\frac{1}{16}\overline{AB}$, причем искомая точка M будет лежать внутри $\overline{A_2B_2}$ и тоже определять одну треть его. Продолжая далее этот процесс, мы получим систему отрезков $\overline{AB}, \overline{A_1B_1}, \overline{A_2B_2}, \overline{A_3B_3}, \dots, \overline{A_nB_n}$, каждый из которых находится внутри предыдущего и вчетверо меньше его. Очевидно, эта система отрезков удовлетворяет всем условиям аксиомы Кантора, и поэтому существует единственная точка, именно M , находящаяся внутри всех отрезков системы.

Так как величина отрезков довольно быстро убывает, то, например, при отрезке длиной в 8 см мы получим, что уже $\overline{A_4B_4} = \frac{1}{256}\overline{AB}$ имеет длину $\frac{8}{256} = \frac{1}{32}$ см, и мы определим положение точки M с достаточно большой степенью точности.

3. 8. В точности таким же методом доказывается основное предложение в теории геометрических построений.

T_1 . Если расстояние прямой от центра окружности меньше радиуса, то прямая и окружность имеют две и только две общие точки.

Пусть мы имеем окружность с центром O и радиусом R (рис. 27) и прямую l , причем расстояние $\overline{OA} < R$. Рассмотрим один из лучей этой прямой с вершиной A , например правый. Так как $\overline{OA} < R$, то A — внутренняя точка круга. Отложим на этом луче отрезок $\overline{AB} = R$. Тогда $\overline{OB} > R$ (наклонная больше перпендикуляра) и, значит, B — внешняя точка круга. Внешними будут и все точки луча AB , следующие за точкой B , так как с увеличением про-

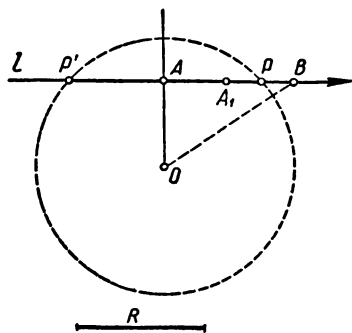


Рис. 27

екции наклонной увеличивается и наклонная, т. е. расстояние точки от центра.

Возьмем середину отрезка \overline{AB} и обозначим ее через A_1 , если она внутренняя, и через B_1 , если она внешняя точка (на рис. 27 A_1 — внутренняя точка).

Далее берем середину той половины отрезка \overline{AB} , которая содержит и внутренние и внешние точки, и обозначим ее через A (с соответствующим номером), если она внутри круга, и через B , если она вне круга.

Продолжая неограниченно этот процесс, мы получим, что либо одна из таких точек окажется на окружности и тогда теорема будет доказана, либо ни одна из таких точек не будет точкой окружности. В таком случае мы будем иметь систему отрезков, удовлетворяющих условиям аксиомы Кантора. Определяемая ими точка лежит между всеми внутренними и всеми внешними точками круга, принадлежащими отрезку \overline{AB} , т. е. она есть точка окружности (точка P на рис. 27). Вторая общая точка P' симметрична с P относительно OA . Более двух общих точек, как известно, прямая и окружность иметь не могут.

Заметим, что аксиомы Архимеда и Кантора можно доказать для дуг одной и той же окружности. Опираясь на эти предложения, легко установить, что если расстояние между центрами двух окружностей меньше суммы, но больше разности их радиусов, то окружности имеют две и только две общие точки.

Этими предложениями обусловлена возможность всех построений, осуществляемых линейкой и циркулем.

Упражнения

Следующие упражнения предлагается решить, пользуясь только предложениями абсолютной геометрии.

1. На данной прямой найти точку, сумма расстояний которой от двух данных точек была бы наименьшей.

2. На данной прямой найти точку, разность расстояний которой от двух данных точек была бы наибольшей.

3. Доказать, что биссектриса угла разностороннего треугольника проходит внутри угла, образуемого медианой и высотой, проходящими через ту же вершину.

4. Точка M лежит внутри треугольника ABC . Доказать, что $\angle BMC > \angle BAC$.

5. Доказать, что если расстояние любой точки основания треугольника до его вершины меньше каждой из боковых сторон, то треугольник равнобедренный.

6. Доказать, что разносторонний треугольник никакой прямой нельзя разбить на два равных треугольника.

7. Доказать, что $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$, если $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$ и $\overline{AC} = \overline{A'C'}$.

8. В треугольнике ABC дано $\overline{AB} = \overline{AC}$. На прямых AB и AC отложим отрезки \overline{BP} и \overline{CQ} , причем \overline{BP} отложен на продолжении AB за точку B , а \overline{CQ} отложен на отрезке \overline{AC} . Доказать, что отрезок \overline{PQ} делится отрезком \overline{BC} пополам.

9*. Доказать: если противоположные углы четырехугольника попарно равны, то и противоположные стороны его тоже попарно равны.

10. Построить биссектрису угла, вершина которого не помещается на чертеже.

11*. Доказать, что суммы противоположных углов вписанного четырехугольника равны между собой.

12*. Доказать, что суммы противоположных сторон выпуклого описанного четырехугольника равны между собой.

13. Хорда \overline{AB} в окружности продолжена в ту и другую сторону на одну и ту же длину так, что $\overline{AM} = \overline{BN}$. Из точек M и N по разные стороны от AB проведены касательные $\overline{MT_1}$ и $\overline{NT_2}$ (T_1 и T_2 — точки касания).

Доказать, что прямая T_1T_2 проходит через середину хорды \overline{AB} .

14*. Доказать, что сумма двух внутренних углов треугольника не может быть равна развернутому углу.

15*. Две данные прямые пересечь третьей прямой так, чтобы в сечении получились равные, но противоположно ориентированные углы.

Глава 4

ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ И ПЕРЕХОД К ЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

4. 1. Следующим элементарным преобразованием является центральная симметрия.

Д₁. Центральная симметрия есть такое преобразование, при котором задается постоянная точка O — центр симметрии и каждая точка A преобразуется в соответственную таким образом, чтобы удовлетворялись условия: $\overline{OA} = \overline{OA'}$ и $O \in \overline{AA'}$.

Другими словами, центр симметрии есть середина отрезка, соединяющего две соответственные точки. Символически преобразование записывается так: $O(A) \equiv A'$.

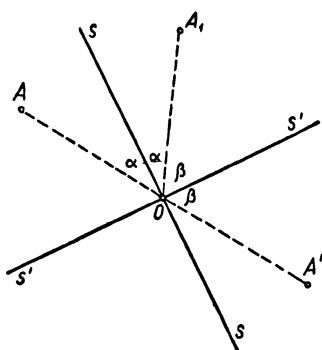


Рис. 28

Непосредственно из этого определения получаем:

С₁. Центр симметрии есть единственная неподвижная точка преобразования.

С₂. Если $O(A) \equiv A'$, то и $O(A') \equiv A$, т. е. соотношение центральной симметрии взаимно.

С₃. Всякая прямая, проходящая через центр симметрии, есть неподвижная прямая преобразования.

Остальные свойства центральной симметрии легко получить, установив ее связь с осевой симметрией.

Т₁. Центральная симметрия эквивалентна двум осевым симметриям со взаимно перпендикулярными осями, проходящими через центр, причем одну из этих осей можно провести произвольно.

Пусть мы имеем центральную симметрию с центром O (рис. 28). Возьмем произвольную точку A и положим $O(A) \equiv A'$. Проведем через точку O произвольную ось s . $s(A) \equiv A_1$, причем $\overline{OA} = \overline{OA_1}$. Вместе с тем $\overline{OA} = \overline{OA'}$ и, значит, $\overline{OA_1} = \overline{OA'}$, и потому ось s' симметрии точек A_1 и A' пройдет через точку O ; $s' \perp s$ как биссектрисы смежных углов. Итак, мы получили $s(A) \equiv A_1$ и $s'(A_1) \equiv A'$, т. е. вместо центральной симметрии мы можем применить две осевые со взаимно перпендикулярными осями, проходящими через центр.

Теми же рассуждениями нетрудно доказать и обратную теорему.

Т₁'. Две последовательные осевые симметрии со взаимно перпендикулярными осями эквивалентны одной центральной с центром в точке пересечения осей.

Действительно, при условии $s(A) \equiv A_1$ и $s(A_1) \equiv A'$ и $s \perp s'$ мы имеем $\overline{OA} = \overline{OA_1}$, $\overline{OA_1} = \overline{OA'}$, т. е. $\overline{OA} = \overline{OA'}$. Если луч OA_1 образует с осью s угол α , а с осью s' угол β , то $\angle AOA' = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 180^\circ$, так как $\alpha + \beta = 90^\circ$, значит, $O \in AA'$.

Из этих теорем получаем ряд важных следствий.

С₄. Центральная симметрия преобразует фигуру в равную и одинаково ориентированную (рис. 29).

Это есть следствие того, что центральная симметрия эквивалентна четному числу осевых симметрий.

Таким образом, центральная симметрия преобразует прямую в прямую, отрезок в равный отрезок, угол в равный угол, окружность в равную окружность и т. д.

С₅. Две пары центрально симметричных точек определяют две пары центрально симметричных прямых. Две пары центрально симметричных прямых определяют две пары центрально симметричных точек.

Пусть $O(A) \equiv A'$, $O(B) \equiv B'$ (рис. 30, а), тогда $O(AB) \equiv A'B'$, $O(AB') \equiv O(A'B)$.

Если $O(a) \equiv a'$ и $O(b) \equiv b'$, то $O(ab) \equiv a'b'$ и $O(ab') \equiv a'b$ (рис. 30, б).

4. 2. Однако наиболее важное свойство центральной симметрии выражено следующей теоремой.

Т₁. Две центрально симметричные между собой прямые не пересекаются.

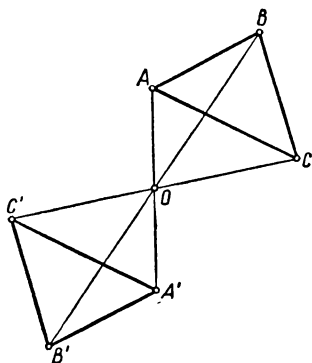


Рис. 29

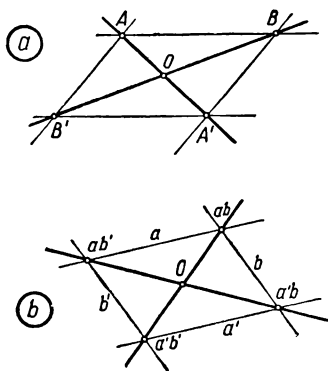


Рис. 30

Возьмем центр симметрии O и прямую a . Если $O \in a$, то $O(a) \equiv a$ и, значит, в этом случае пересечения нет. Если $O \notin a$, то $O(a) \equiv a'$. Допустим, что существует точка aa' пересечения прямых a и a' . Тогда получим $O(aa') \equiv a'a$, но $aa' \equiv a'a$ и, значит, эта точка есть неподвижная точка преобразования. Но этого быть не может, так как в центральной симметрии есть только одна неподвижная

точка — центр; точка aa' не может совпасть с центром, так как O не принадлежит прямой a . Итак, прямые a и a' не могут пересекаться между собой.

Решим теперь з а д а ч у:

Через точку, не принадлежащую данной прямой, провести прямую, не пересекающую данную.

Возьмем некоторую прямую a и вне ее точку A_1 (рис. 31). Возьмем на прямой a произвольную точку A_1 и примем середину отрезка AA_1 точку O_1 за центр симметрии.

Тогда точка A_1 преобразуется в A и прямая a — в прямую a_1 , проходящую через точку A и не пересекающую прямую a . Задача решена.

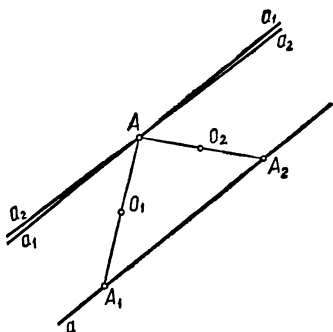


Рис. 31

Однако полученное построение содержит неопределенность, так как точку A_1 мы взяли п р о и з в о л ь н о. Поэтому если мы возьмем новую точку A_2 на прямой a , середину O_2 отрезка AA_2 примем за новый центр симметрии, то получим новую, непересекающую a прямую a_2 , прохо-

дящую через ту же точку A . Это построение мы можем повторить сколько угодно раз и будем получать все новые и новые прямые, непересекающие прямую a и проходящие через точку A . Таким образом, мы пришли к заключению, что, по-видимому, через точку A к прямой a можно провести бесконечное множество непересекающих.

4. 3. Предыдущие рассуждения привели нас к важнейшему моменту в развитии геометрии. С одной стороны, наши выводы заставляют нас признать, что через точку, не принадлежащую прямой, можно провести бесконечное множество прямых, не пересекающих данную прямую. С другой стороны, при попытках осуществить это построение линейкой и циркулем мы обнаружим, что все полученные прямые как будто совпадают друг с другом. Но ведь, может быть, это совпадение только кажущееся? Может быть, масштабы наших построений слишком малы, а наши инструменты слишком грубы и неточны? Итак, перед нами два пути: либо мы допустим существование бесконечного множества непересекающих и тогда мы придем к геомет-

рии Лобачевского—Больяи, либо мы допустим слияние всех этих непересекающихся в одну и тогда придем к нашей привычной геометрии Евклида. Чтобы разобраться в этом вопросе, нам нужно выяснить, какая связь существует между теорией параллельности и теоремой о сумме внутренних углов треугольника.

Докажем прежде всего две леммы.

Л₁. Сумма внутренних углов треугольника не может быть больше развернутого угла.

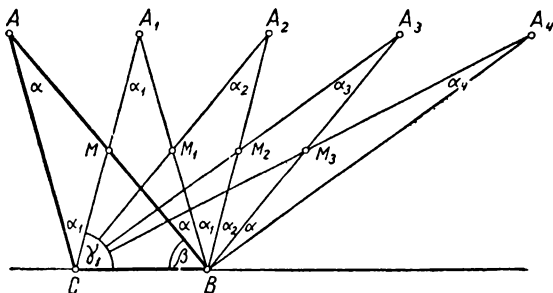


Рис. 32

Допустим обратное: положим, что в треугольнике ABC (рис. 32) сумма внутренних углов равна $180^\circ + \delta$, т. е. $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ + \delta$.

Возьмем середину M стороны AB и пусть $M(C) \equiv A_1$. Луч CM разобьет угол γ на два угла: $\gamma_1 + \alpha_1$, т. е. $\gamma = \gamma_1 + \alpha_1$. Найдем сумму внутренних углов в треугольнике A_1BC : $\angle A_1 = \alpha_1$, $\angle BSA_1 = \gamma_1$, $\angle CBA_1 = \alpha + \beta$. Итак, сумма внутренних углов в треугольнике A_1BC равна $\alpha + \beta + \alpha_1 + \gamma_1 = \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ + \delta$, т. е. она равна прежней сумме. Повторим опять такую же операцию с треугольником A_1BC : найдем точку A_2 , симметричную точке C относительно середины M_1 стороны AB , и получим $\triangle A_2BC$ с такой же суммой внутренних углов. Повторяя неограниченно этот процесс, мы можем получить треугольники: $\triangle A_3BC$, $\triangle A_4BC$, ..., $\triangle A_nBC$, ... Заметим, что $\angle CBA_n = \beta + \alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1}$, поэтому углы $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n, \dots$ должны стремиться к нулю. Действительно, если бы этого не было, то это значило бы, что каждый из этих углов больше некоторого угла ϵ : $\alpha > \epsilon$, $\alpha_1 > \epsilon$, ..., $\alpha_{n-1} > \epsilon$. Складывая эти неравенства, получим: $\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} > n\epsilon$.

Но так как число n мы можем взять сколь угодно большим, то по аксиоме Архимеда можно получить, что $n\epsilon > 180^\circ$, а тогда и подавно $\beta + \alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} > 180^\circ$, т. е. внутренний угол в треугольнике A_nBC больше 180° , чего быть не может.

Итак, углы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n, \dots$ неограниченно уменьшаются, и можно всегда взять n настолько большим, чтобы оказалось:

$$\alpha_n < \delta.$$

Это значит, что в треугольнике $A_{n+1}BC$ сумма внутренних углов при вершинах B и C будет больше 180° . Действительно,

$$\alpha_n + \angle B + \angle C = 180^\circ + \delta \text{ или } \angle B + \angle C = 180^\circ + \delta - \alpha_n.$$

Но $\delta - \alpha_n$ — положительный угол, следовательно,

$$\angle B + \angle C > 180^\circ.$$

Мы вновь пришли к противоречию, так как сумма двух внутренних углов треугольника не может быть больше 180° (см. упражнение 14 гл. 1). Итак, в абсолютной геометрии сумма внутренних углов треугольника не может быть больше 180° .

4. 4. L₂. Если сумма внутренних углов какого-нибудь треугольника окажется равной 180° , то тогда и сумма углов любого треугольника будет тоже равна 180° .

Доказательство разобьем на три части.

1°. Если в треугольнике ABC сумма внутренних углов равна 180° , то она равна 180° в каждом из двух треугольников, на которые можно разбить этот треугольник прямой, проходящей через вершину. Возьмем $\triangle ABC$ (рис. 33) и пусть $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.

Прямая AM разбивает этот треугольник на треугольники ABM и ACM . Сумма внутренних углов этих треугольников равна 360° , так как она включает в себе внутренние углы треугольника ABC и еще сумму смежных углов при вершине M . Если бы оказалось, что сумма внутренних углов одного из этих треугольников меньше 180° , то тогда у другого из этих треугольников эта сумма должна оказаться больше 180° , а этого быть не может в силу **L₁**. Итак, сумма внутренних углов каждого из составляющих треугольников равна 180° .

2°. Если у какого-нибудь треугольника сумма внутренних углов равна 180° , то можно построить треугольник

со сколь угодно большими сторонами и с такой же суммой внутренних углов.

Пусть в треугольнике ABC (рис. 34) имеем

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Построим треугольники, центрально симметричные с треугольником ABC относительно середины каждой стороны. В результате получим 3 новых треугольника: BCA_1 , CAB_1 и ABC_1 . Точки A, B_1, C_1 лежат на одной и той же прямой, так как сумма трех углов при вершине A равна $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Точно так же лежат на одной прямой точки B, C_1, A_1 и C, A_1, B_1 . Мы получили $\triangle A_1B_1C_1$ с внутренними углами α, β, γ и со сторонами, вдвое большими, чем у треугольника ABC . Повторяя неограниченно это построение, мы можем получить тре-

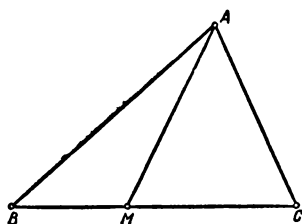


Рис. 33

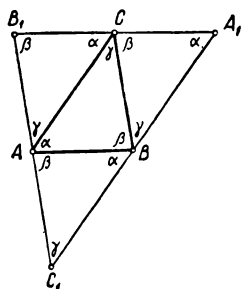


Рис. 34

угольник со сколь угодно большими сторонами, но с теми же внутренними углами α, β, γ , причем $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

3°. Пусть теперь мы имеем треугольник MNP и какой-нибудь треугольник с суммой внутренних углов, равной 180° . Предыдущим построением преобразуем второй треугольник в треугольник ABC , настолько большой, чтобы $\triangle MNP$ поместился внутри его (рис. 35). Прямая BM пересечет сторону AC в точке Q . Как было показано в первой части доказательства, сумма внутренних углов в треугольнике BCQ равна 180° . На том же основании она равна 180° в треугольнике BMC , далее — в треугольнике NMC и, наконец, в треугольнике MNP . Итак, сумма внутренних углов любого треугольника MNP при этих условиях тоже равна 180° .

Т₁. Если сумма внутренних углов треугольника 180° , то через точку, не принадлежащую прямой, можно к этой прямой провести одну и только одну непересекающуюся.

[illegible]

отрезка \overline{AB} . Отложим на прямой b вправо от B отрезок $\overline{BB_1} = \overline{AB}$ и получим равнобедренный треугольник ABB_1 . Обозначим через α_1 углы при вершинах A и B_1 , через β — угол при вершине B , через α — внешний угол, смежный с β . По условию $2\alpha_1 + \beta = 180^\circ$, а по свойству смежных углов $\alpha + \beta = 180^\circ$, поэтому $2\alpha_1 = \alpha$ и $\alpha_1 = \frac{\alpha}{2}$. Отсюда следует,

что AB_1 образует с прямой a угол, тоже равный α_1 . Повторим это построение, отложив вправо от B_1 отрезок $\overline{B_1B_2} = \overline{AB_1}$. Такими же рассуждениями мы покажем, что AB_2 образует с прямой a угол $\alpha_2 = \frac{\alpha}{4}$. Продолжая это построение, мы получим точки B_3, B_4, \dots , причем прямые AB_3, AB_4, \dots образуют с прямой a углы $\frac{\alpha}{8}, \frac{\alpha}{16} \dots$ Теперь нетрудно

44

$= \frac{\alpha}{2^n}$ и при достаточно большом n он станет меньше угла mAa . Но тогда прямая m будет проходить внутри угла $B_{n-1}AB_n$ и, значит, пересечет отрезок $B_{n-1}B_n$ на прямой b .

Такое же построение можно осуществить и слева от AB и тем же способом показать, что любая прямая (например, n на рис. 36), проходящая внутри угла aAB слева от AB , тоже пересечет b .

Итак, при этих условиях существует одна и только одна прямая, проходящая через точку A и не пересекающая прямую b . Эта единственная непаресекающая прямая называется параллельной.

4.6. Теперь мы можем высказать постулат параллельности, содержащий минимальные требования, обеспечивающие построение евклидовой геометрии.

A⁽⁵⁾. (Аксиома параллельности.) Существует такой треугольник ABC , в котором две прямые, центрально симметричные с прямой BC относительно середин сторон AB и AC , совпадают друг с другом (рис. 37).

Другими словами, это значит, что если мы будем через точку A проводить при помощи уже известного построения две прямые, непаресекающие BC , пользуясь двумя серединами сторон AB и AC как центрами симметрии, то эти две прямые сольются в одну. Это можно проверить непосредственным опытом.

Следствиями аксиомы параллельности являются предложения:

C₁. Сумма внутренних углов всякого треугольника равна 180° .

Для доказательства рассмотрим рисунок 37. В силу того, что обе прямые, центрально симметричные с BC , совпали друг с другом, при вершине A получаются три угла: α , β , γ , сумма которых равна развернутому. Итак, $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Но в лемме **L₂** мы показали, что в таком случае сумма внутренних углов любого треугольника равна тоже 180° . Отсюда также получаем постулат параллельности Плейфера:

C₂. Через точку, не принадлежащую данной прямой, мож-

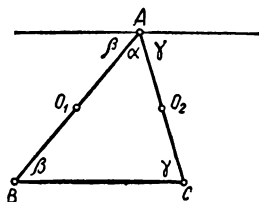


Рис. 37

но провести одну и только одну прямую, не пересекающую данную.

Это есть следствие предыдущего предложения и теоремы, доказанной в 4.5. В курсах геометрии это предложение обычно принимают за аксиому параллельности.

Д₁. Единственная прямая, проходящая через данную точку и не пересекающая данную прямую, называется прямой, параллельной данной.

Из этого определения следует, что в евклидовой геометрии две центрально симметричные между собой прямые параллельны.

Далее из постулата Плейфера получаем основное свойство соотношения параллельности:

С₃. Параллельность прямых есть соотношение эквивалентности:

1°. Если $a \parallel b$, то и $b \parallel a$. 2°. $a \parallel a$, так как центрально симметричные прямые параллельны, а прямая, проходящая через центр, преобразуется сама в себя. 3°. Если $a \parallel b$, $b \parallel c$, то $a \parallel c$.

Параллельность прямых следует из того, что если бы a пересекала c , то получилось бы, что через точку пересечения проходят две прямые, параллельные одной и той же третьей.

Из постулата Плейфера следует также:

С₄. Прямая, пересекающая одну из параллельных, пересекает и другую.

4.7. С понятием параллельности связано очень важное понятие п о л о с ы, не получившее, к сожалению, должного признания в школьном курсе геометрии.

Д₁. Полосой называется часть плоскости, заключенная между двумя параллельными прямыми. Эти прямые называются сторонами полосы, а отрезки, соединяющие точку одной стороны с точкой другой, — поперечными отрезками.

Т₁. Середина каждого поперечного отрезка есть центр симметрии полосы. Положим, что $a \parallel b$ (рис. 38), $A \subset a$, $B \subset b$, O — середина \overline{AB} . Пусть $O(b) \equiv b'$. Тогда $b' \parallel b$ и $A \subset b'$. Но в силу постулата параллельности, $a \equiv b'$ и, значит, $O(b) \equiv a$.

Из этой теоремы следуют прямая и обратная теоремы о соотношениях между углами, которые получаются от пересечения полосы секущей прямой. В частности, отсюда получаем, что прямая, перпендикулярная к одной из параллельных, перпендикулярна и к другой.

Д₂. Поперечный отрезок, перпендикулярный к сторонам полосы, называется *шириной* полосы.

С₁. Ширина полосы везде одинакова.

Действительно, если $a \parallel b$, $A \in a$, $A' \in a$, $B \in b$, $B' \in b$, $AB \perp a$, $A'B' \perp a$ (рис. 39), то ось s симметрии точек A и A' будет и осью симметрии для отрезков AB и $A'B'$.

Из этого следствия находим известное предложение о геометрическом месте точек, расстояния которых от данной прямой равно данному отрезку. В частности, получим:

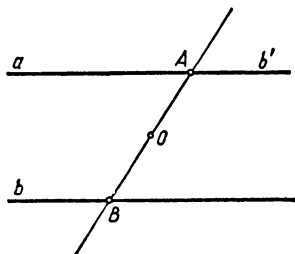


Рис. 38

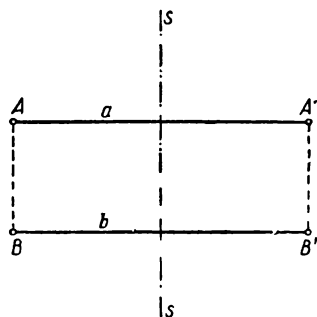


Рис. 39

С₂. Геометрическое место центров симметрии полосы есть прямая, проходящая на равных расстояниях от ее сторон и называемая *осью* полосы.

На свойстве оси полосы делить пополам всякий поперечный отрезок основано доказательство важной теоремы Фалеса¹.

Т₂. Если на данной прямой отложить ряд равных отрезков и через их концы провести параллельные между собой прямые, то эти прямые на произвольной секущей образуют тоже ряд равных отрезков.

Возьмем на прямой a ряд равных отрезков: $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \dots = \overline{A_{n-1}A_n}$ и через точки $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$ проведем параллельные: $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3 \parallel \dots \parallel l_{n-1} \parallel l_n$

¹ Фалес (Θαλῆς, конец VII — начало VI в. до н. э.) — выдающийся мыслитель древней Греции.

(рис. 40). Пересечем эти параллельные произвольной секущей b и в пересечении получим точки $B_1, B_2, B_3, \dots B_{n-1}, B_n$. Прямые l_1 и l_3 являются сторонами полосы, поперечным отрезком которой служит $\overline{B_1B_3}$, а осью полосы — прямая l_2 . Она делит пополам отрезок $\overline{B_1B_3}$, поэтому $\overline{B_1B_2} = \overline{B_2B_3}$. Далее прямые l_2 и l_4 являются сторонами полосы, осью которой служит прямая l_3 , значит, $\overline{B_2B_3} = \overline{B_3B_4}$ и т. д.

Из теоремы Фалеса легко получается свойство средней линии треугольника и трапеции.

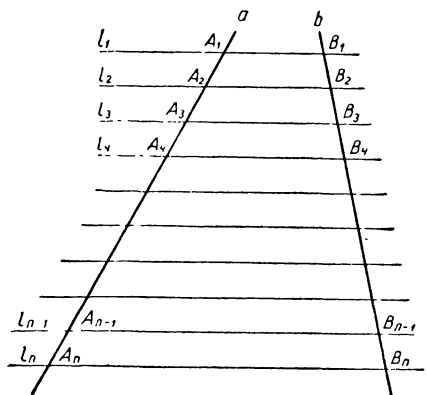


Рис. 40

Из свойств полосы также легко получаются все свойства параллелограммов. Параллелограмм определяется как часть плоскости, общая двум пересекающимся полосам. Общий центр симметрии полос есть центр симметрии параллелограмма.

Прямоугольник определяется пересечением двух перпендикулярных друг другу полос, ромб — пересечением равных полос, квадрат — пересечением равных и перпендикулярных полос.

4.8. Сумма внутренних углов треугольника определяет и сумму внутренних углов любого многоугольника. Так как каждый n -угольник можно разбить на $n - 2$ треугольника, то сумма его внутренних углов будет равна $(n - 2) 180^\circ$. Применяя это, в частности, к четырехугольнику, по-

лучим, что в четырехугольнике сумма внутренних углов равна 360° .

Нетрудно показать, опираясь на предложения абсолютной геометрии, что во вписанном четырехугольнике суммы противоположных углов равны между собой (см. упражнение 11 к предыдущей главе). Если же припомнить, что сумма внутренних углов четырехугольника равна 360° , то отсюда получаем, что сумма противоположных углов вписанного четырехугольника

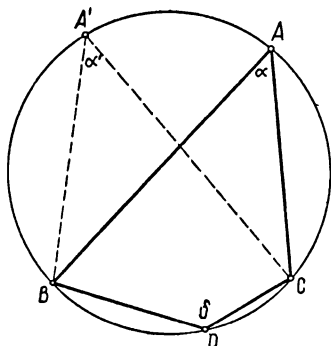


Рис. 41

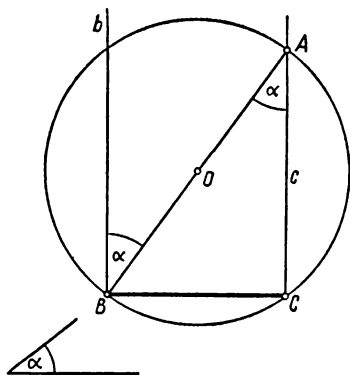


Рис. 42

равна 180° . Из этого следует весьма часто применяемая теорема:

Т₁. В одной и той же окружности все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой.

Рассмотрим окружность и вписанный в нее угол BAC (рис. 41). Возьмем на дуге BC (на которую опирается этот угол) произвольную точку D . Введем обозначения: $\angle BAC = \alpha$, $\angle BDC = \delta$. Как мы уже установили, $\alpha + \delta = 180^\circ$. Если вершину A переместить в любую точку A' той же окружности, не принадлежащую дуге BC , то получим $\angle BA'C = \alpha'$, $\alpha' + \delta = 180^\circ$, поэтому $\alpha' + \delta = \alpha + \delta$ и, значит, $\alpha' = \alpha$. Итак, все вписанные углы, опирающиеся на дугу BC , равны между собой.

На основании этой теоремы доказывается предложение о том, что геометрическим местом точек, из которых данный отрезок виден под данным углом, служит дуга окружности.

Для того чтобы получить это геометрическое место, произведем следующее построение. Пусть \overline{BC} — данный отрезок, α — данный угол (рис. 42). Проведем через точки B и C перпендикуляры b и c к прямой BC . У луча Bb построим угол, равный α . Сторона этого угла пересекает луч Cc в точке A . Из середины O отрезка AB , как из центра, радиусом OA проводим окружность, которая пройдет через точки B и C . Дуга этой окружности, проходящая через точку A , и будет искомым геометрическим местом, так как все вписанные углы, опирающиеся на дугу BC , равны α : $\angle BAC = \alpha$ как внутренние накрест лежащие.

Упражнения

1. Доказать «закон постоянства центра»: если через противоположные вершины параллелограмма провести две пары взаимно параллельных прямых, то получим новый параллелограмм, центр которого совпадает с центром данного параллелограмма.

2. Доказать, что середины сторон всякого четырехугольника суть вершины параллелограмма; середины двух противоположных сторон и середины двух диагоналей — тоже вершины параллелограмма.

3. Точка P , лежащая внутри треугольника, движется параллельно направлению \overline{AB} до встречи со стороной \overline{BC} , потом она движется параллельно направлению \overline{CA} до встречи с \overline{AB} , далее параллельно \overline{BC} до встречи с \overline{AC} , потом параллельно \overline{AB} до встречи с \overline{BC} , потом параллельно \overline{CA} до встречи с \overline{AB} , потом параллельно \overline{BC} до встречи с \overline{AC} и, наконец, вновь параллельно \overline{AB} . Доказать, что при этом последнем движении точка P вернется в исходное положение.

4. Доказать, что биссектрисы внутренних углов выпуклого четырехугольника образуют новый четырехугольник, около которого можно описать окружность.

5. Четыре прямые, взаимно пересекаясь, образуют четыре треугольника. Доказать, что четыре окружности, описанные около этих треугольников, проходят через одну и ту же точку.

6. На окружности, описанной около треугольника, взята точка. Доказать, что три точки, симметричные с этой точкой относительно сторон треугольника, лежат на одной и той же прямой, проходящей через ортоцентр треугольника.

7. Доказать, что середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами, лежат на одной и той же окружности (она называется «окружностью девяти точек»).

8. Данный треугольник вписать в другой данный треугольник.

Глава 5
ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
В ЕВКЛИДОВОЙ ПЛОСКОСТИ

5.1. Для дальнейшего изучения свойств евклидова пространства нам необходимо познакомиться с важным математическим понятием **вектора**.

С понятием вектора тесно связано понятие **направления**, опирающееся на аксиомы порядка на прямой.

Если для двух точек A и B на данной прямой установлено, что $A \rightarrow B$, то этим на прямой определено **направление**. Если $A \rightarrow B \rightarrow C$, то лучи AB , BC и AC называются одинаково направленными или **сонаправленными**. Лучи же BA , CB и CA называются противоположно направленными (или **противонаправленными**) относительно лучей AB , BC и CA .

Прямая, на которой установлено направление, т. е. для любых двух точек определено, какая из них предшествующая, называется **ориентированной**. Направление ориентированной прямой указывается **стрелкой**.

Две параллельные ориентированные прямые называются **сонаправленными**, если при пересечении их какой-нибудь секущей точки обеих прямых, следующие за точками пересечения, оказываются в одной полуплоскости относительно этой прямой. Если это условие не выполняется, то прямые называются

противонаправленными. На рисунке 43, a показаны сонаправленные, на рисунке 43, b — противонаправленные прямые.

Д₁. **Вектором** называется отрезок, на котором указано направление, т. е. один конец которого считается предшествующей точкой (начало), а второй конец — последующей точкой (конец). Вектор обозначается стрелочкой, которая ставится над буквами, указывающими на-

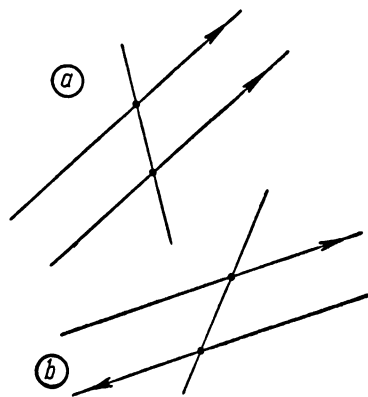


Рис. 43

начало и конец его: например, \vec{AB} (вектор AB). Иногда вектор обозначается и одной буквой, но тоже со стрелочкой сверху \vec{m} (вектор m).

D₂. Два вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на параллельных прямых. Если эти прямые ориентированы по направлению векторов и сонаправлены, то и векторы называются *сонаправленными*. Два вектора считаются *равными* тогда и только тогда, когда они сонаправлены и когда равны соответствующие отрезки. На рисунке 44, а векторы \vec{m} и \vec{n} только сонаправлены; на рисунке 44, б векторы \vec{a} и \vec{b} равны.

5.2. Операции над векторами представляют собой обобщение соответствующих операций над отрезками.

D₁. Чтобы сложить два вектора, от конца первого вектора проводим вектор, равный второму, и берем вектор, идущий от начала первого до конца второго (рис. 45).

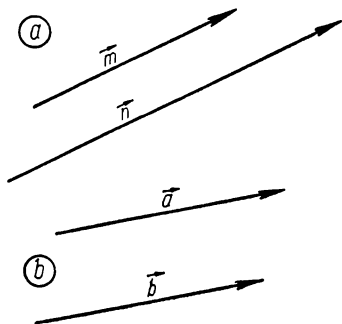


Рис. 44

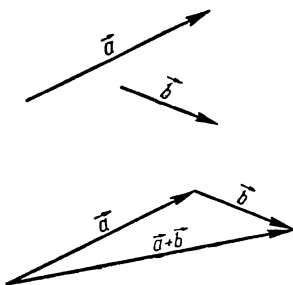


Рис. 45

Непосредственно из этого определения следует:

C₁. Для трех произвольно расположенных точек A , B и C всегда имеет место равенство:

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}.$$

C₂. Сумма векторов подчиняется переместительному и сочетательному законам:

$$1) \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}; \quad 2) \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}.$$

Первое из этих равенств доказывается на основании свойств параллелограмма (рис. 46, а), в котором вектор-сумма совпадает с диагональю.

Правильность второго равенства непосредственно следует из C_1 . Действительно, полагая $\vec{a} = \vec{OA}$; $\vec{b} = \vec{AB}$; $\vec{c} = \vec{BC}$ (рис. 46, б), получим: $\vec{OA} + (\vec{AB} + \vec{BC}) = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC}$; $(\vec{OA} + \vec{AB}) + \vec{BC} = \vec{OB} + \vec{BC} = \vec{OC}$. Итак, $\vec{OA} + (\vec{AB} + \vec{BC}) = (\vec{OA} + \vec{AB}) + \vec{BC}$.

D₂. Если на данном векторе изменить направление, то получим вектор, называемый *противоположным* данному. Если первоначальный вектор был \vec{m} , то противоположный обозначается $-\vec{m}$. Если данный вектор был \vec{AB} , то противоположный будет \vec{BA} , причем $\vec{BA} = -\vec{AB}$.

C₃. Сумма двух взаимно противоположных векторов дает нуль-вектор (точку):

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}.$$

C₄. От сложения с нуль-вектором данный вектор не изменяется:

$$\begin{aligned}\vec{AB} + \vec{0} &= \vec{AB} + (\vec{BC} + \vec{CB}) = (\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{CB} = \vec{AC} + \\ &+ \vec{CB} = \vec{AB}.\end{aligned}$$

D₃. Для того чтобы вычесть из вектора \vec{a} вектор \vec{b} , прибавляют к вектору \vec{a} вектор, противоположный \vec{b} (рис. 47):

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

C₅. Если два вектора привести к общему началу и построить параллелограмм, сторонами которого служат эти векторы, то диагональ, идущая от начала векторов, дает

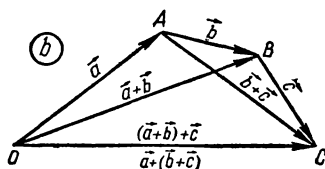
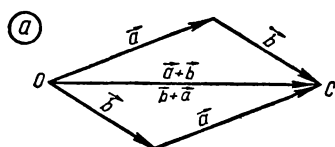


Рис. 46

их сумму, а диагональ, соединяющая их концы, дает разность, причем вектор-разность направлен от вычитаемого к уменьшаемому (рис. 48).

5.3. В абсолютной геометрии мы рассмотрели два вида движений в плоскости: собственные и несобственные. Первые являются результатом четного числа осевых симметрий, вторые — нечетного. В евклидовой геометрии из собствен-

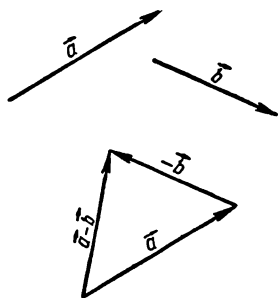


Рис. 47

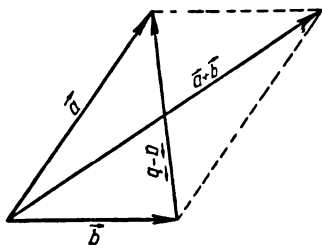


Рис. 48

ных движений выделяется одно, наиболее простое. Оно называется параллельным переносом (иногда — просто переносом) или трансляцией.

Д₁. Параллельным переносом называется такое преобразование, когда данной точке A плоскости приводится в соответствие точка A' так, чтобы вектор $\vec{AA'} = \vec{t}$ был одним и тем же для всех точек (рис. 49).

Преобразование трансляции с вектором \vec{t} записывается так:

$$\vec{t}(A) \equiv A'.$$

Связь между трансляцией и осевой симметрией дается следующей теоремой.

Т₁. Трансляция есть собственное движение, эквивалентное двум последовательным осевым симметриям, оси которых перпендикулярны вектору переноса и расстояние между осями равно половине длины этого вектора. При этом одну из осей можно взять произвольно.

Для доказательства рассмотрим трансляцию с вектором \vec{t} . Пусть $\vec{t}(A) \equiv A'$ (рис. 50). Проведем ось $s \perp AA'$

и положим $s(A) \equiv A_1$, где $A_1 \in AA'$. Точки A_1 и A' определяют ось s' , преобразующую их друг в друга: $s'(A_1) \equiv A'$, где $s' \perp AA'$ и потому $s' \parallel s$. Далее имеем $\vec{AA'} = \vec{AP} + \vec{PA_1} + \vec{A_1P'} + \vec{P'A'}$ (здесь P и P' — точки пересечения прямой AA' с осями s и s'). Но в силу симметрии $\vec{AP} = \vec{PA_1}$ и $\vec{A_1P'} = \vec{P'A'}$. Поэтому $\vec{AA'} = 2\vec{PA_1} + 2\vec{A_1P'} = 2(\vec{PA_1} + \vec{A_1P'}) = 2\vec{PP'}$.

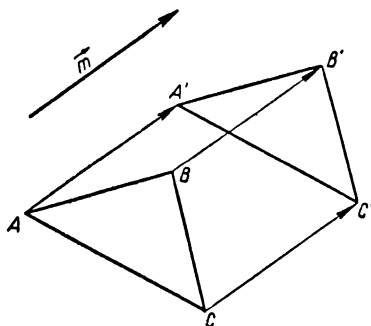


Рис. 49

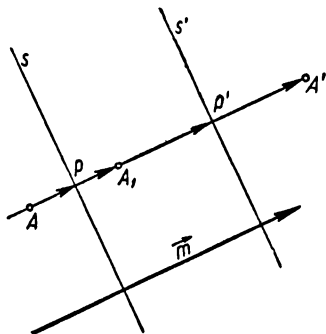


Рис. 50

Подобным же образом доказывается и обратное предложение, что две последовательные осевые симметрии с параллельными осями эквивалентны одному, параллельному переносу, вектор которого направлен перпендикулярно к осям от первой оси ко второй и имеет длину, вдвое большую расстояния между осями.

С₁. Трансляция преобразует всякий вектор в равный вектор.

Пусть $\vec{m}(A) \equiv A'$ и $\vec{m}(B) \equiv B'$, следовательно, $\vec{AA'} = \vec{BB'}$. Прибавим к обеим частям этого равенства по вектору $\vec{A'B}$. Тогда получим $\vec{AA'} + \vec{A'B} = \vec{A'B} + \vec{BB'}$, или $\vec{AB} = \vec{A'B'}$.

Отсюда также следует, что перенос преобразует прямую в параллельную прямую.

С₂. Неподвижных точек в трансляции нет. Неподвижными прямыми являются все прямые, параллельные вектору переноса.

5.4. Преобразование параллельного переноса является характерным для евклидовой плоскости, так как оно опирается на понятие параллельности и тем самым связано с аксиомой о параллельных прямых. Преобразование это называется *линейным*, так как оно преобразует прямую линию в прямую.

Другим элементарным линейным преобразованием является *вращение*.

D₁. Вращением называется такое преобразование, когда задается одна неподвижная точка O — *центр вращения*, а всякая другая точка A преобразуется в новую точку A' при условии, что $\overline{OA} = \overline{OA'}$ и $\angle AOA' = \varphi$, где φ — постоянный по величине и направлению угол, называемый *углом вращения* (рис. 51, где $\angle \varphi = 60^\circ$). Вращение с центром O и углом φ записывается символически: $O_\varphi(A) \equiv A'$.

T₁. Вращение есть собственное движение, эквивалентное двум осевым симметриям с осями, проходящими через центр, и с углом между ними, равным половине угла вращения. Одну из этих осей можно провести произвольно.

Пусть мы имеем вращение $O_\varphi(A) \equiv A'$ (рис. 52). Проведем через O ось s и положим $s(A) \equiv A_1$. Так как $\overline{OA} = \overline{OA'}$ и $\overline{OA} = \overline{OA_1}$, то $\overline{OA'} = \overline{OA_1}$ и ось симметрии s'

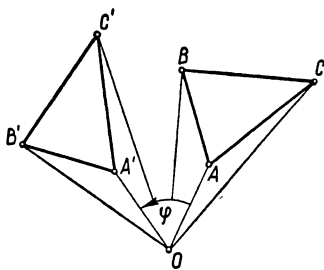


Рис. 51

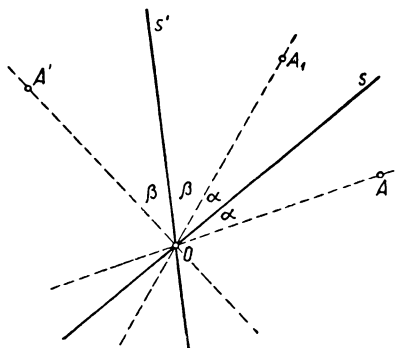


Рис. 52

точек A_1 и A' пройдет через точку O . При этом $\angle AOs = \angle sOA_1$; $\angle A_1Os' = \angle s'OA'$; $\varphi = \angle AOs + \angle sOA_1 + \angle A_1Os' + \angle s'OA' = 2 \angle sOA_1 + 2 \angle A_1Os' = 2 \angle sOs'$. Итак, $\angle sOs' = \frac{\varphi}{2}$.

Обратно тем же путем легко показать, что две последовательные осевые симметрии с пересекающимися осями эквивалентны одному вращению с центром в точке пересечения осей и с углом вращения, вдвое большим угла между осями и направленным от первой оси ко второй.

С₁. Вращение преобразует фигуру в собственно конгруэнтную. В частности, ориентированная прямая преобразуется в ориентированную прямую, образующую с первоначальной прямой угол, равный углу вращения.

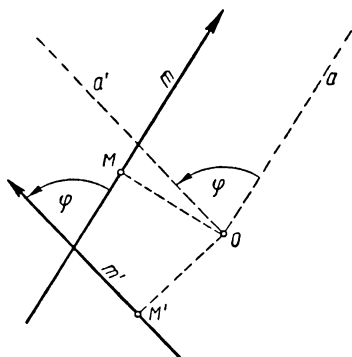


Рис. 53

Действительно, если $O_\varphi(a) \equiv a'$, причем a проходит через центр O , то, очевидно, $\angle aOa' = \varphi$. Пусть прямая m не проходит через O и $O_\varphi(m) \equiv m'$. Проведем через O прямую $a \parallel m$. Тогда $O_\varphi(a) \equiv a'$, где $a' \parallel m'$ в силу конгруэнтности фигур, $\angle aOa' = \varphi$. Но $\angle aOa' = \angle mOm'$ как углы со взаимно параллельными сторонами. Поэтому $\angle mOm' = \varphi$ (рис. 53).

Наиболее важным предложением, связывающим оба преобразования—параллельный перенос и вращение,—является следующая теорема.

Т₂. (Теорема Бернулли—Шаля.) *Каждые две собственно конгруэнтные фигуры можно преобразовать друг в друга либо одной трансляцией, либо одним вращением.*

В главе третьей мы доказали, что любые две собственно конгруэнтные фигуры можно преобразовать друг в друга двумя осевыми симметриями. Если окажется, что оси симметрий параллельны, то преобразование будет трансляцией. Оно определяется однозначно, так как если A, B, C, \dots — точки первой фигуры, A', B', C', \dots — соответствующие точки второй, то $\vec{AA'} = \vec{BB'} = \vec{CC'} = \dots$, т. е. вектор переноса определяется любой парой соответственных точек.

Если же окажется, что оси двух симметрий пересекаются, то преобразование будет вращением с центром в точке пересечения осей. Вращение это тоже определяется однозначно. Обозначим по-прежнему через A, B, C, \dots точки пер-

вой фигуры, через A', B', C', \dots соответственные точки второй, а через O — центр вращения. В силу того что $\overline{OA} = \overline{OA'}$, $\overline{OB} = \overline{OB'}$, $\overline{OC} = \overline{OC'}$, ..., оси симметрии точек A и A' , B и B' , C и C' , ... все пройдут через точку O , чем однозначно определяется ее положение.

5.5. На понятие параллельности опираются еще два преобразования, осуществимые только в евклидовом пространстве: гомотетия и подобие.

D₁. Три точки A, B, C , не лежащие на одной и той же прямой, называются *подобно расположенными* с точками A', B', C' , если равны и одинаково ориентированы углы при соответственных вершинах треугольников, определяемых этими точками: $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$. Это соотношение обозначается знаком \sim .

C₁. Если точки A, B, C не лежат на одной и той же прямой, то для любой пары точек A' и B' существует единственная точка C' , удовлетворяющая условию: $ABC \sim A'B'C'$.

Для этого достаточно при точках A' и B' на отрезке $A'B'$ построить углы, равные и одинаково ориентированные с углами A и B . Точка C' определится пересечением сторон этих углов. Угол при точке C' равен углу при точке C в силу того, что $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ и также $\angle A' + \angle B' + \angle C' = 180^\circ$, отсюда $\angle C = \angle C'$, так как $\angle A = \angle A'$ и $\angle B = \angle B'$.

C₂. Соотношение подобного расположения есть соотношение эквивалентности.

1°. Если $ABC \sim A'B'C'$, то и $A'B'C' \sim ABC$.

2°. $ABC \sim ABC$. 3°. Если $ABC \sim A'B'C'$, $A'B'C' \sim A''B''C''$, то и $ABC \sim A''B''C''$, так как при условии $\angle A = \angle A'$, $\angle A' = \angle A''$, получим $\angle A = \angle A''$ и тем же путем $\angle B = \angle B''$, $\angle C = \angle C''$.

L₁. Если $OAB \sim OA'B'$ и AB не параллельна $A'B'$, то и $OAA' \sim OBB'$.

Пусть нам дано, что $OAB \sim OA'B'$ (рис. 54). Так как AB и $A'B'$ не параллельны, то они пересекаются в некоторой точке P . В силу равенства $\angle PBO = \angle PB'O$ точки $PBB'O$ лежат на одной и той же окружности. На тех же основаниях точки $PAA'O$ тоже лежат на одной и той же окружности. Построив эти окружности, мы убедимся, что $\angle OAA' = \angle OPA' = \angle OBB'$. Аналогично $\angle OA'A = \angle OPA = \angle OB'V$.

Итак, мы получили: $OAA' \sim OBB'$.

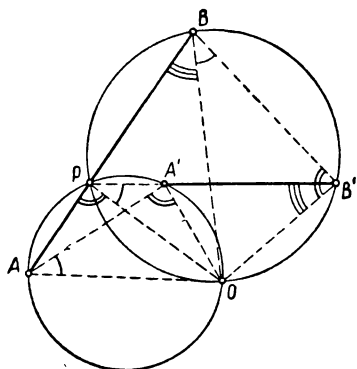


Рис. 54

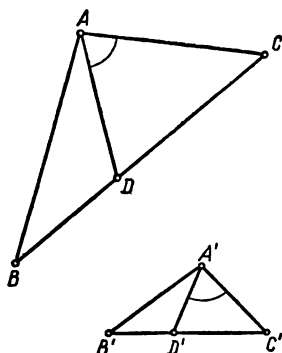


Рис. 55

D₂. Если $ABC \sim A'B'C'$, $D \in BC$, $D' \in B'C'$, то тройки точек BCD и $B'C'D'$ называются *подобно расположенными*, если $ACD \sim A'C'D'$.

C₃. Если $ABC \sim A'B'C'$ и $D \in BC$, то положение точки D' , подобно расположенной с D относительно $B'C'$, определяется однозначно.

Для определения точки D' достаточно построить при точке A' угол, равный и одинаково ориентированный с углом CAD (рис. 55).

L₂. Если точки A , B и D лежат на одной и той же прямой, A' и B' — произвольные точки, то на прямой $A'B'$ существует единственная точка D' , удовлетворяющая условию $ABD \sim A'B'D'$.

Пусть нам даны точки A , B и D и $A'B'$ (рис. 56). Возьмем точку C , не принадлежащую AB , и построим соответственную точку C' , удовлетворяющую условию:

$$ABC \sim A'B'C'.$$

Далее согласно C_3 построим точку D' на прямой $A'B'$, чтобы выполнялось условие:

$$ABD \sim A'B'D'.$$

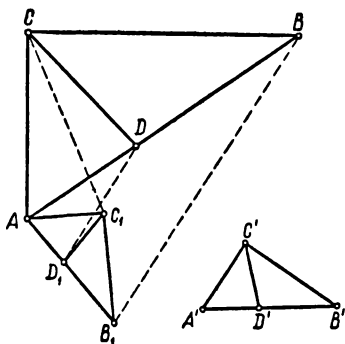


Рис. 56

Преобразуем фигуру $A'B'C'D'$ в фигуру $AB_1C_1D_1$, равную и одинаково ориентированную с фигурой $A'B'C'D'$. Согласно построению имеем:

$$\left. \begin{array}{l} ABC \sim AB_1C_1 \\ ACD \sim AC_1D_1 \end{array} \right\} \text{ по лемме 1 получим: } \left. \begin{array}{l} ABB_1 \sim ACC_1 \\ ACC_1 \sim ADD_1 \end{array} \right\}$$

Следовательно, $ABB_1 \sim ADD_1$, но это значит, что $\angle ABB_1 = \angle ADD_1$ и оба угла одинаково ориентированы. Поэтому $BB_1 \parallel DD_1$ и потому положение точки D_1 (а значит, и точки D') однозначно определяется положением точки D на прямой AB и не зависит от случайного выбора точки C .

5₄. Если дана любая тройка точек A , B и C , то для любых двух точек A' и B' однозначно определяется точка C' , удовлетворяющая условию: $ABC \sim A'B'C'$.

Если $C \notin AB$, то положение точки C' однозначно определяется построением, указанным в C_1 . Если же A , B и C лежат на одной и той же прямой, то положение точки C' однозначно определяется построением, указанным в L_2 .

5.6. D₁. Гомотетией¹ называется такое преобразование, когда задается постоянная точка S — центр гомотетии и две соответственные точки P и P' на прямой, проходящей через S , и каждая точка A преобразуется в соответственную точку A' так, чтобы удовлетворялось условие:

$$SPP' \sim SAA'.$$

Если P и P' лежат по одну сторону от центра S , то гомотетия называется положительной, а если по разные, то отрицательной. Гомотетия, определяемая центром S и парой соответственных точек P и P' , записывается так: $S_{pp'}(A) \equiv A'$.

C₁. Так как по определению $SPP' \sim SAA'$, $SPP' \sim SBB'$ и т. д., то в качестве определяющей пары точек можно брать любую пару соответственных точек: AA' , BB' ,...

C₂. Прямые, проходящие через две пары соответственных точек, параллельны между собой.

Действительно, из условия $SAA' \sim SBB'$ получаем, что $SAB \sim SA'B'$, т. е. $\angle SAB = \angle SA'B'$ и, значит, $AB \parallel A'B'$.

¹ Французское слово гомотетия (homothetie) произошло от греческих слов *ὁμός* — подобный и *θέτος* — расположенный, подобно расположенный.

Это дает возможность легко производить преобразование гомотетии проведением параллельных при помощи чертежного треугольника. На рисунке 57, а показана положительная гомотетия, на рисунке 57, б — отрицательная.

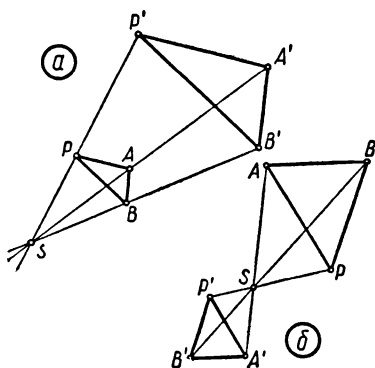


Рис. 57

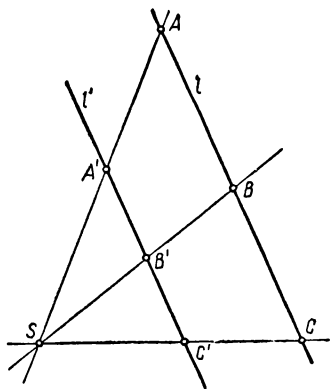


Рис. 58

Т₁. Гомотетия преобразует каждую тройку точек в подобно расположенную тройку точек.

Заметим прежде всего, что если точки P, A, B преобразуются гомотетией соответственно в точки P', A', B' , то $\angle APB = \angle A'P'B'$, $\angle ABP = \angle A'B'P'$, $\angle BAP = \angle B'A'P'$ (рис. 57). Докажем это для углов APB и $A'P'B'$. При положительной гомотетии лучи PA и $P'A'$, PB и $P'B'$ сонаправлены, при отрицательной эти же пары лучей противоположены. Поэтому и в том и в другом случае углы APB и $A'P'B'$ равны и одинаково ориентированы.

Это же можно сказать и про остальные пары углов.

Итак, $PAB \sim P'A'B'$. Если же окажется, что $B \in AP$, то и $B' \in A'P'$, причем $SAP \sim SA'P'$ и $SBP \sim SB'P'$, и, значит, вновь $PAB \sim P'A'B'$.

Из этой теоремы получаем:

С₃. Гомотетия преобразует прямую линию в прямую и окружность в окружность.

Действительно, если l — данная прямая, A, B, C — ее произвольные точки, A', B', C' — соответственные им в гомотетии (рис. 58), то $ABC \sim A'B'C'$ и, значит, точки

$A'B'C'$ лежат на одной и той же прямой l' , причем $l' \parallel l$.

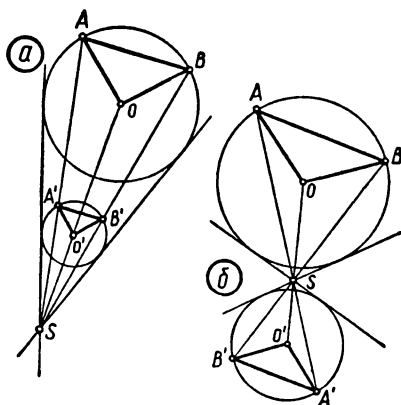


Рис. 59

Итак, $S_{AA'}(l) \equiv l' (l' \parallel l)$.

Если же дана окружность с центром O (рис. 59), то, беря на ней постоянную точку A и подвижную точку B , получим, что гомотетия с центром S преобразует тройку точек ABO в подобно расположенную тройку точек $A'B'O'$. Если $O \notin AB$, то $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$. Но $\angle A = \angle B$ и, значит, $\angle A' = \angle B'$, т. е. $\triangle A'O'B'$ равнобедренный и $O'B' = O'A'$. Поэтому, когда точка B будет двигаться по первой окружности, соответствующая точка B' будет описывать окружность с центром O' и с радиусом, равным $O'A'$. В случае положительной гомотетии через центр S проходят две внешние общие касательные (рис. 59, а); в случае отрицательной — через центр S проходят две общие внутренние касательные к обеим окружностям.

Предложением, обратным теореме T_1 , является следующая теорема.

T_2 . Если между точками двух фигур установлено взаимно однозначное соответствие и каждая тройка точек первой фигуры подобно расположена с соответственной тройкой точек второй фигуры, то при условии, что в этих фигурах имеется хотя бы одна прямая, проходящая через две точки первой фигуры, параллельная прямой, проходящей через две

соответственные точки второй фигуры, эти фигуры гомотетичны.

Пусть A, B, C, D, \dots — точки первой фигуры, A', B', C', D', \dots — соответственные точки второй фигуры. Положим, что, например, $AB \parallel A'B'$. Если $AB \neq A'B'$ и $\vec{AB} \neq \vec{A'B'}$, то прямые AA' и BB' пересекаются в некоторой точке S , которую и примем за центр гомотетии с основными точками A и A' . Так как $ABC \sim A'B'C'$ и так как точка C' определяется однозначно тройкой ABC , то наша гомотетия, преобразуя эту тройку в подобно расположенную, преобразует C в C' и точно так же — D в D' и т. д. Если бы оказалось, что $AB \equiv A'B'$, то мы могли бы взять вне этой прямой точку P и найти точку P' , удовлетворяющую условию $ABP \sim A'B'P'$, а центр S можно было бы найти пересечением прямых AA' и PP' . Если, наконец, окажется, что $\vec{AB} = \vec{A'B'}$, то прямые AA' и BB' будут параллельны (рис. 60) и мы получим, что $\vec{AA'} = \vec{BB'}$.

Но тогда тройки подобно расположенных точек определяют вершины конгруэнтных и одинаково ориентированных треугольников и в этом случае гомотетия вырождается в трансляцию с вектором переноса $\vec{AA'}$. Поэтому трансляцию можно рассматривать как гомотетию с «несобственным» центром.

Непосредственно из этой теоремы получаем:

С₄. Гомотетия вполне определена, если двум точкам A и B первой фигуры поставлены в соответствие две точки A' и B' второй фигуры при условии, что $AB \parallel A'B'$.

5.8. Во всем предыдущем изложении в этой главе мы нигде не пользовались аксиомами непрерывности и понятием числа. Однако, имея в виду дальнейшие приложения этих преобразований, мы докажем следующую теорему.

Т₁. Отношение двух векторов, соответственных друг другу в преобразовании гомотетии, есть постоянное действительное число, называемое коэффициентом гомотетии.

Рассмотрим прежде всего векторы, имеющие общее

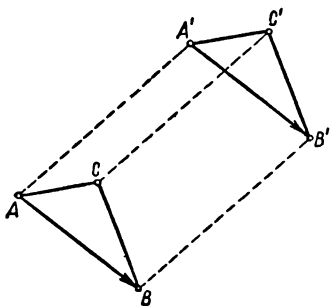


Рис. 60

начало в центре S данной гомотетии (рис. 61). Найдем отношение $\frac{\vec{SP'}}{\vec{SP}}$: Для этого разделим \vec{SP} на 10 равных векторов и посмотрим, сколько таких делений отложится на $\vec{SP'}$. Если таких делений окажется точно n_1 , то мы

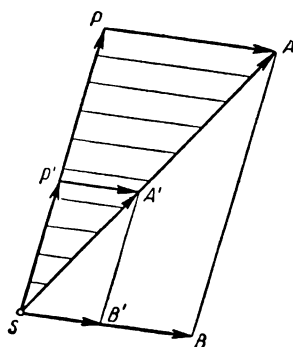


Рис. 61

будем писать $\frac{\vec{SP'}}{\vec{SP}} = \frac{n_1}{10}$. Если же точка P' окажется между n_1 -м и $(n_1 + 1)$ -м делениями, то мы напишем неравенство:

$$\frac{n_1}{10} < \frac{\vec{SP'}}{\vec{SP}} < \frac{n_1 + 1}{10}.$$

Далее разделим \vec{SP} на 100 равных частей и посмотрим, сколько таких делений отложится на $\vec{SP'}$. В резуль-

тате мы либо получим равенство $\frac{\vec{SP'}}{\vec{SP}} = \frac{n_2}{10^2}$, либо найдем неравенство:

$$\frac{n_2}{10^2} < \frac{\vec{SP'}}{\vec{SP}} < \frac{n_2 + 1}{10^2}.$$

Продолжая дальше этот процесс, мы получим или равенство $\frac{n_m}{10^m} = \frac{\vec{SP'}}{\vec{SP}}$, или бесконечные сходящиеся последовательности $\left\{ \frac{n_m}{10^m}; \frac{n_m + 1}{10^m} \right\}$, которыми определяется действительное число k — отношение данных коллинеарных векторов.

Для того чтобы найти отношение другой пары векторов $\frac{\vec{SA'}}{\vec{SA}}$, проведем через точки деления прямые, параллельные PA . Тогда по теореме Фалеса $\vec{SA'}$ тоже разделит-

ся на 10, 100, . . . равных частей, а на векторе $\vec{SA'}$ отложится такое точно число делений, как и на $\vec{SP'} : n_1, n_2, \dots n_m, \dots$, другими словами, отношение $\frac{\vec{SP'}}{\vec{SP}}$ и $\frac{\vec{SA'}}{\vec{SA}}$ будут выражаться одной и той же конечной или бесконечной десятичной дробью.

$$\text{Итак, } \frac{\vec{SP'}}{\vec{SP}} = \frac{\vec{SA'}}{\vec{SA}}.$$

Проведем теперь из центра S векторы $\vec{SB} = \vec{PA}$ и $\vec{SB'} = \vec{P'A'}$. Тогда ввиду коллинеарности \vec{PA} и $\vec{P'A'}$ векторы \vec{SB} и $\vec{SB'}$ тоже коллинеарны и при этом $AB \parallel A'B'$, т. е. B и B' соответствуют друг другу в той же гомотетии. Поэтому $\frac{\vec{SB'}}{\vec{SB}} = \frac{\vec{SP'}}{\vec{SP}}$ и, значит, так же относятся и равные им векторы:

$$\frac{\vec{P'A'}}{\vec{PA}} = \frac{\vec{SP'}}{\vec{SP}} = k.$$

Для положительной гомотетии, в которой соответственные векторы сонаправлены, принимается, что $k > 0$. Для отрицательной гомотетии, в которой соответственные векторы противоположны, принимается $k < 0$. При $k = -1$ гомотетия тождественна с центральной симметрией относительно центра S . Если $k = 1$, то каждая точка плоскости остается неподвижной и мы имеем преобразования тождества.

Итак, гомотетия вполне определяется заданием центра S и коэффициента k . Поэтому преобразование можно записать так:

$$S_k(A) \equiv A'.$$

С₁. Две окружности всегда гомотетичны между собой и коэффициент гомотетии равен отношению радиусов.

Рассмотрим окружности с центрами O и O' (рис. 59).

Возьмем два коллинеарных радиуса \vec{OA} и $\vec{O'A'}$ и положим, что $AA' \neq OO'$ и $\vec{OA} \neq \vec{O'A'}$. Тогда согласно C_4

(5.7) парами O, A и O', A' определена гомотетия с центром S и коэффициентом $k = \frac{O'A'}{OA}$. Если точка A будет дви-

гаться по первой окружности, то соответственная точка A' опишет окружность с центром O^2 и радиусом, равным $O'A'$, т. е. вторую данную окружность. При \vec{OA} и $\vec{O'A'}$ сонаправленных гомотетия положительна (рис. 59, а), при противоположенных — отрицательна. Если окружности концентрические, то центром гомотетии будет их общий центр. Если окружности равны, то первая гомотетия вырождается

в трансляцию, а вторая становится тождественной с центральной симметрией.

С₂. Две последовательные гомотетии эквивалентны одной гомотетии, центр которой лежит на прямой, проходящей через центры данных гомотетий, а коэффициент равен произведению коэффициентов этих гомотетий.

Так как гомотетия вполне определяется двумя парами соответственных точек, то положим, что первая гомотетия определяет

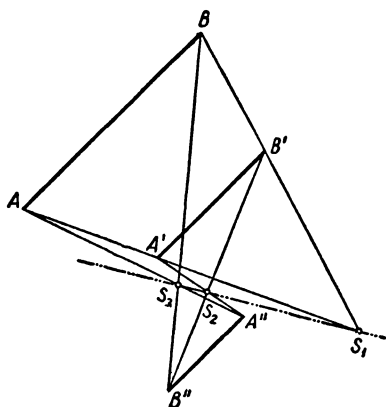


Рис. 62

ся парами A, B и A', B' ($AB \parallel A'B'$), а вторая — парами A', B' и A'', B'' ($A'B' \parallel A''B''$) (рис. 62).

Тогда между точками первой и третьей фигур можно установить взаимно однозначное соответствие: отнесем точке A точку A'' , точке B — точку B'' и т. д. Вместе с тем $AB \parallel A''B''$ и потому вполне определена гомотетия, преобразующая первую фигуру в третью¹, причем центр этой гомотетии найдем в пересечении прямых AA'' и BB'' . Обозначим через S_1, S_2, S_3 центры трех гомотетий, через k_1, k_2, k_3 — их коэффициенты.

Так как при гомотетии остаются неподвижными те и толь-

¹ Как уже указывалось выше, при $\vec{AB} = \vec{A''B''}$ третья гомотетия вырождается в трансляцию.

ко те прямые, которые проходят через центр, то прямая S_1S_2 будет неподвижной после двух гомотетий, поэтому она должна проходить и через центр, третьей результирующей гомотетии. Далее имеем:

$$k' = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{AB}}; \quad k_2 = \frac{\overrightarrow{A''B''}}{\overrightarrow{A'B'}};$$

$$\text{тогда } k_1 k_2 = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{AB}} \cdot \frac{\overrightarrow{A''B''}}{\overrightarrow{A'B'}} = \frac{\overrightarrow{A''B''}}{\overrightarrow{AB}} = k_3.$$

5.9. Преобразование подобия является обобщением гомотетии.

D₁. *Подобием называется преобразование, при котором задается постоянная точка S —центр подобия и две соответственные точки P и P' , а каждая точка A преобразуется в соответствующую точку A' так, чтобы выполнялось условие: $SPA \sim SP'A'$ (рис. 63). Подобие фигур обозначается тем же знаком \sim .*

C₁. *Гомотетия есть частный случай подобия, когда $P' \in SP$.*

C₂. *Подобие эквивалентно вращению и последующей гомотетии с общим центром S .*

Чтобы доказать это, заметим, что из условия $SPA \sim SP'A'$ следует $SPP' \sim SAA'$, значит, $\angle PSP' = \angle ASA' = \varphi$. Поэтому если повернуть первую фигуру на угол φ около S , то точка P займет положение P_1 на углу SP' , а точка A — положение A_1 на луче SA' . Кроме того, $\angle SP'A' = \angle SPA = \angle SP_1A_1$, поэтому $P_1A_1 \parallel P'A'$ и, значит, фигуры будут гомотетичны при центре S и с коэффициентом $r = \frac{P'A'}{P_1A_1} = \frac{P'A'}{PA} = \frac{SP'}{SP}$.

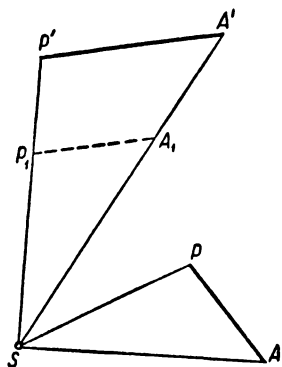


Рис. 63

Отсюда следует, что подобие вполне определено центром S , коэффициентом подобия r и углом φ и потому преобразование точки A в A' можно записать так: $S_{r\varphi}(A) \equiv A'$.

Очевидно также, что подобие преобразует прямую в прямую, окружность в окружность и вообще всякую тройку точек в подобно расположенную тройку.

Т₁. Если между точками двух фигур можно установить взаимно однозначное соответствие и если каждая тройка

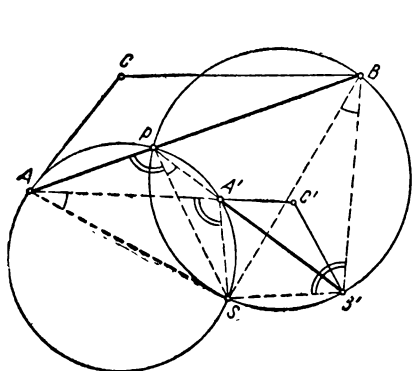


Рис. 64

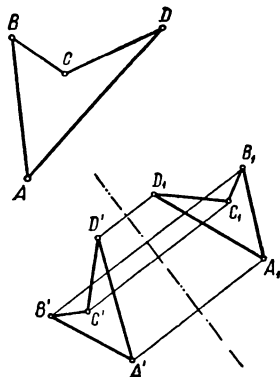


Рис. 65

точек первой фигуры подобно расположена с соответственной тройкой точек второй фигуры, то такие фигуры подобны между собой.

Положим, что A, B, C, \dots — точки первой фигуры, A', B', C', \dots — соответственные точки второй (рис. 64). Допустим, что $A'B'$ не параллельна AB , так как в противном случае фигуры были бы гомотетичны и теорема была бы доказана.

Итак, пусть AB и $A'B'$ пересекаются в точке P . Опишем окружность околоточек P, A, A' и P, B, B' . Имея общую точку P , они пересекутся еще в одной точке S . По свойству вписанных углов $\angle SAA' = \angle SPA' = \angle SBB'$ и также¹ $\angle SA'A = \angle SPA = \angle SB'B$. Значит, $SAA' \sim SBB'$ и мы имеем преобразование подобия с центром S . Так как это преобразование переводит любую тройку точек в подобно расположенную тройку, то, применяя это к тройке ABC , получим, что точка C преобразуется в C' , а значит, и вся первая фигура преобразуется

¹ Во вписанном четырехугольнике $SPBB'$ внутренний угол $SB'B$ равен противоположному внешнему углу SPA .

во вторую. Коэффициент подобия $r = \frac{\overline{A'B'}}{AB}$, угол вращения¹ $\varphi = \angle SAA'$.

С₃. Преобразование подобия вполне определяется, если двум точкам данной фигуры привести в соответствие две точки новой фигуры.

Например, из доказательства предыдущей теоремы видно, что центр, коэффициент и угол, определяющий преобразование, вполне определены заданием точек A , B и A' , B' .

Если фигуру преобразовать в подобную и полученную фигуру подвергнуть преобразованию осевой симметрии, то получим новую фигуру, которая называется *несобственно подобной* первоначальной фигуре.

Например, на рисунке 65 $ABCD \sim A'B'C'D'$; а $A_1B_1C_1D_1$ симметрична с $A'B'C'D'$, поэтому $A_1B_1C_1D_1$ несобственно подобна фигуре $ABCD$. Дадим общее определение несобственно подобным фигурам.

Д₂. *Две фигуры называются несобственно подобными, если между их точками можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором у каждой из двух соответственных троек точек углы между соответственными лучами равны, но противоположно ориентированы.*

Например, на рисунке 65 $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, но углы противоположно ориентированы. Знак несобственного подобия: ∞ .

С₄. *Если одну из двух несобственно подобных фигур преобразовать в симметричную относительно оси, параллельной биссектрисе угла между двумя соответственными прямыми этих фигур, то получим фигуру, гомотетичную с первой.*

На рисунке 66 точки A , B , C , ... принадлежат первой фигуре, A' , B' , C' , ... принадлежат второй фигуре, несобственно подобной с первой. Обозначим через l биссектрису угла между прямыми AB и $A'B'$ и возьмем в качестве оси симметрии прямую $s \parallel l$. Пусть $s(A'B'C'...) \equiv A_1B_1C_1...$

Так как прямые AB и $A'B'$ образуют с прямой l (а значит, и с прямой s) равные, но противоположно ориентированные углы, то прямые AB и A_1B_1 образуют с осью s

¹ Предлагаем читателю самостоятельно разобрать случай, когда точка S совпадает с точкой P .

равные и одинаково ориентированные углы. На основании T_1 (5.6) фигуры $ABC \dots$ и $A_1 B_1 C_1 \dots$ гомотетичны.

Заметим, что у несобственно подобных фигур отношение сходственных отрезков постоянно и называется так же коэффициентом подобия.

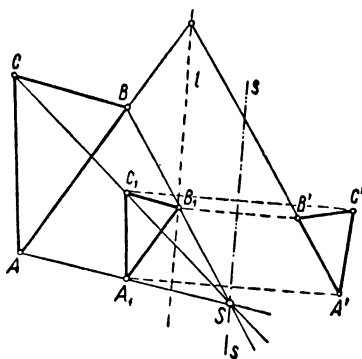


Рис. 66

Упражнения

1. Какому преобразованию эквивалентны две последовательные центральные симметрии?

2. Даны три центра симметрии O_1 , O_2 и O_3 . Пусть $O_1(A) \equiv A_1$; $O_2(A_1) \equiv A_2$; $O_3(A_2) \equiv A_3$, $O_1(A_3) \equiv A_4$, $O_2(A_4) \equiv A_5$, $O_3(A_5) \equiv A_6$. Доказать, что $A_6 \equiv A$.

3. Точки A и B находятся по разные стороны от полосы. Найти кратчайшее расстояние от A до B при условии, что часть этого пути внутри полосы должна иметь данное направление.

4. Доказать, что равными между собой четырехугольниками произвольного вида можно сплошь покрыть всю плоскость.

5. В данный квадрат вписать равносторонний треугольник так, чтобы одна из вершин треугольника находилась в данной точке на стороне квадрата.

6. Построить квадрат так, чтобы три его вершины лежали на трех данных параллельных прямых.

7. Доказать, что два последовательных вращения эквивалентны одному вращению или одной трансляции.

8. Построить треугольник, зная положение центров трех квадратов, построенных извне на его сторонах.

9. Доказать, что всякое несобственное движение в плоскости эквивалентно трансляции и осевой симметрии относительно оси, параллельной вектору переноса.

10. Рассмотрим шарнирный параллелограмм $MNPQ$ (рис. 67). Если точку S закрепить неподвижно, в точке A закрепить штифт,

в точке A' — карандаш, причем точки S, A, A' лежат на одной и той же прямой, то, обводя штифтом A какую-нибудь фигуру, мы увидим, что карандаш A' будет чертить гомотетичную фигуру с центром гомотетии S . Доказать. Рассмотренный инструмент называется **п а н т о г р а ф о м**.

11. В данную полуокружность вписать квадрат.

12. Доказать, что точка касания двух окружностей есть их центр гомотетии.

13. Провести окружность, касающуюся двух данных прямых и данной окружности.

14. Доказать, что шесть центров гомотетии трех не равных между собой окружностей, центры которых не лежат на одной и той же прямой, расположены по три на четырех прямых.

15. Доказать, что две фигуры подобны, если между их точками можно установить взаимно однозначное соответствие и если соответственные отрезки пропорциональны.

16. В данный четырехугольник вписать четырехугольник, подобный другому данному четырехугольнику.

17. Построить треугольник, подобный данному так, чтобы одна из его вершин лежала в данной точке, другая — на данной прямой, третья — на данной окружности.

18. Доказать, что две несобственно подобные фигуры можно преобразовать друг в друга одной осевой симметрией и одной гомотетией, центр которой лежит на оси этой симметрии.

19. Указать необходимые и достаточные условия подобия двух многоугольников.

20. Три стороны треугольника проходят через три постоянные точки. Треугольник изменяется, оставаясь все время подобным некоторому данному треугольнику. Какую линию описывает ортоцентр треугольника? Какую линию описывает центр тяжести этого треугольника?

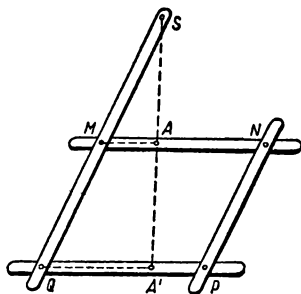


Рис. 67

Глава 6

ИНВАРИАНТЫ. ГЕОМЕТРИЯ ОКРУЖНОСТЕЙ И СФЕР

6.1. При изучении геометрических преобразований нас интересуют, с одной стороны, те изменения, которые мы производим в геометрических фигурах, а с другой стороны — те величины, которые при данном преобразовании остаются неизменными. Эти величины, называемые **и н в а р и а н т а м и** преобразования, играют исключительно важную

роль при изучении преобразований, так как знание одних лишь инвариантов преобразования позволяет полностью это преобразование определить.

Например, инвариантами преобразования движения являются длина отрезка и величина угла, а все это преобразование можно определить тем, что каждая пара точек первой фигуры преобразуется в соответственную пару точек другой фигуры, причем расстояние между точками остается неизменным.

Преобразование подобия можно охарактеризовать тем, что при нем сохраняется прямолинейное расположение точек и не изменяется величина угла между сходственными прямыми.

Рассмотрим теперь некоторые инварианты, которые нам понадобятся в последующем изложении.

Д₁. *Простым отношением трех точек A , B и C , лежащих на одной и той же прямой, называется отношение*

$(ABC) = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} = k$. Здесь точки A и B называются

базисными, точка C — делящей. Отношение считается положительным, если векторы \overrightarrow{CA} и \overrightarrow{CB} сонаправлены, и отрицательным, если они противоположно направлены.

С₁. *Простое отношение есть инвариант преобразования подобия.*

Положим, что точки A , B и C одной и той же прямой подобием преобразованы в точки A' , B' , C' . Обозначая через r коэффициент подобия, получим:

$$\frac{\overrightarrow{C'A'}}{\overrightarrow{CA}} = \frac{\overrightarrow{C'B'}}{\overrightarrow{CB}} = r.$$

Пользуясь главным свойством пропорции, находим отсюда:

$$\frac{\overrightarrow{C'A'}}{\overrightarrow{C'B'}} = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}}.$$

Знаки того и другого отношения одинаковы, так как порядок точек при подобии сохраняется.

Итак, $(A'B'C') = (ABC)$.

С₂. *Если в символе простого отношения поменять местами две первые буквы, то получим число, обратное первоначальное.*

чальному. Если в этом символе поменять местами две последние буквы, то получим число, равное разности между единицей и первоначальным значением отношения.

$$\text{Если } (ABC) = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} = k, \text{ то } (BAC) = \frac{\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{CA}} = \frac{1}{k}.$$

$$(ACB) = \frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CC}} = 1 + \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{BC}} = 1 - \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} = 1 - k.$$

Отсюда следует, что при шести перестановках букв в символе (ABC) получим шесть различных простых отношений:

$$(ABC) = k; (BAC) = \frac{1}{k}; (ACB) = 1 - k; (CAB) = \frac{1}{1 - k};$$

$$(BCA) = 1 - \frac{1}{k}; (CBA) = \frac{k}{k - 1}. \text{ При этом предполагается, что } k \neq 1.$$

Т₁. Если даны базисные точки A и B , то положение делящей точки C однозначно определяется числом $k = (ABC)$.

Положим, что на прямой даны точки A и B и число k задано отношением отрезков $\frac{\overline{m}}{\overline{n}}$ (рис. 68). Проведем $AM \parallel BN$, где $\overline{AM} = \overline{m}$, $\overline{BN} = \overline{n}$. Прямая MN пересекает прямую AB в искомой точке C , так как парами A, M и B, N определяется гомотетия с центром C и коэффициентом $k = \frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{BN}} = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{\overline{m}}{\overline{n}}$.

Точка C определена однозначно, так как из условия $(ABC) = k$ имеем $(CBA) = \frac{k}{k - 1}$, т. е. $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{k}{k - 1}$, или $\overrightarrow{AC} = \frac{k}{k - 1} \overrightarrow{AB}$, т. е. вектор \overrightarrow{AC} (а значит, и точка C) однозначно определяется данным вектором \overrightarrow{AB} и числом k .

Если $k > 0$, то векторы \overrightarrow{CA} и \overrightarrow{CB} сонаправлены, поэтому \overrightarrow{AM} и \overrightarrow{BN} должны быть тоже сонаправлены. Точка C в этом случае лежит в не отрезка \overrightarrow{AB} .

Если $k < 0$, то векторы должны быть противоположно направлены. На черт. 68 точка D удовлетворяет условию $(ABD) = -k = -\frac{\bar{m}}{n}$, $\vec{BN'} = -\vec{BN}$ и точка D находится внутри отрезка \overline{AB} .

6.2. Д1. Если A и B — базисные точки, C и D — делящие точки, то при условии $(ABD) = -(ABC)$ говорят, что пара C и D гармонически разделяет пару A и B (рис. 68).

С1. Разделение пар — свойство взаимное: если C и D гармонически разделяют пару A и B , то и пара A и B гармонически разделяет C и D .

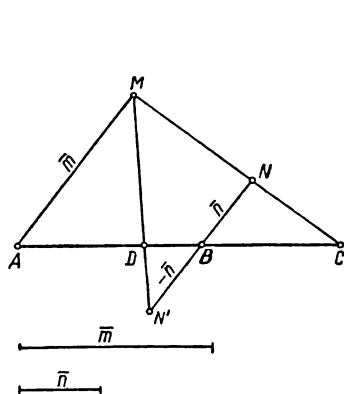


Рис. 68

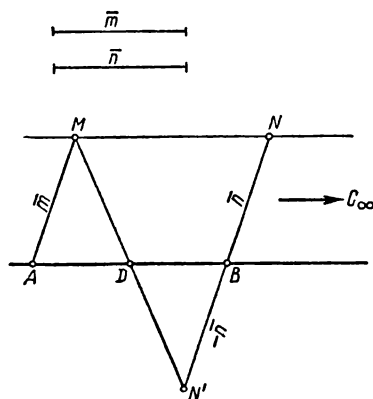


Рис. 69

Это получается непосредственно из равенства $(ABD) = -(ABC)$, или $\frac{\vec{DA}}{\vec{DB}} = -\frac{\vec{CA}}{\vec{CB}}$, получаем $\frac{\vec{DA}}{\vec{CA}} = -\frac{\vec{DB}}{\vec{CB}}$, т. е. $\frac{\vec{AD}}{\vec{AC}} = -\frac{\vec{BD}}{\vec{BC}}$, или $(CDA) = -(CDB)$.

С2. Если A и B — базисные точки, то положение одной из гармонически разделяющих точек однозначно определяет положение другой точки, разделяющей пары.

Действительно, если дано, что $(ABC) = k$, то $(ABD) = -k$, и положение точки D определено однозначно.

Теорема предыдущего пункта и все последующие выводы из нее требуют одной, весьма существенной оговорки. Именно, утверждая, что двум базисным точкам A и B и данному действительному числу k однозначно соответствует положение делящей точки C на прямой AB , мы не рассмотрели один исключительный случай, именно тот, когда $k = 1$.

В этом случае $\frac{\overline{m}}{n} = 1$ и, значит, $\overline{m} = \overline{n}$, точно так же $\overline{AM} = \overline{BN}$ и $MN \parallel AB$ (рис. 69).

Если представить себе, что на рисунке 68 отрезок \overline{n} увеличивается, приближаясь к отрезку \overline{m} , в силу чего число k приближается к единице, то точка C будет неограниченно удаляться в направлении \overline{AB} , а точка D — приближаться к середине отрезка \overline{AB} . В пределе при k , равном 1, прямая MN становится параллельной к AB и точка C уже не будет существовать, а точка D станет серединой отрезка, и для нее число k станет равно — 1. Однако, желая сохранить общность рассуждений и выводов, условимся считать, что и при $k = 1$ существует единственная точка, обозначаемая символом C_∞ и называемая бесконечно удаленной или несобственной точкой прямой AB , удовлетворяющей условию $(ABC_\infty) = 1$.

Если D — середина отрезка \overline{AB} , то считается, что D и C_∞ гармонически разделяют пару A, B . Эта же точка C_∞ должна считаться общей точкой параллельных прямых AB и MN . А так как отрезки \overline{m} и \overline{n} могут иметь любую длину, лишь бы удовлетворялось условие $k = 1$ или $\overline{m} = \overline{n}$, то и прямая MN может проходить и ближе и дальше от прямой AB . Другими словами, все прямые, параллельные одной и той же прямой, должны иметь одну и только одну общую несобственную точку.

И подобно тому, как мы множество всех прямых, проходящих через одну и ту же точку, называем пучком прямых, мы будем также называть пучком множеством прямых, параллельных между собой. Введение понятия «несобственной точки» идет по обычному пути расширения математических понятий. Когда, например, мы вводим дробные, отрицательные, иррациональные, мнимые числа, мы называем эти новые объекты «числами» потому, что ряд свойств, присущих ранее известным числам, принадлежат и новым объектам.

Точно так же и несобственная точка обладает некоторыми свойствами обычных точек. Например, обычная точка и точка несобственная определяют одну и только одну прямую: эта прямая проходит через данную обычную точку и параллельна той прямой, при помощи которой задается несобственная точка. Принимается также, что две несобственные точки определяют единственную несобственную прямую, которой принадлежат все несобственные точки плоскости.

6.3. Введение понятия гармонического расположения четырех точек связано с рассмотрением двух простых отношений (ABC) и (ABD) , которые в этом случае должны быть равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку:

$$\frac{(ABC)}{(ABD)} = -1.$$

Полученное «отношение отношений» является частным случаем более общего понятия сложного, или ангармонического, отношения четырех точек, к изучению которого мы и перейдем.

Д1. *Сложным, или ангармоническим, отношением четырех точек A, B, C и D одной и той же прямой называется частное двух простых отношений*

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}}.$$

Здесь A и B называются базисными точками, C и D — делящими.

Отметим прежде всего ряд свойств сложного отношения, получаемых непосредственно из определения.

С1. *Если вторая делящая точка несобственная, то сложное отношение приводится к простому:*

$$(ABCD_{\infty}) = (ABC).$$

Действительно, имея в виду, что $(ABD_{\infty}) = 1$, получим:

$$(ABCD_{\infty}) = \frac{(ABC)}{(ABD_{\infty})} = \frac{(ABC)}{1} = (ABC).$$

С2. *Если ангармоническое отношение равно -1 , то делящая пара гармонически разделяет базисную пару точек.*

Если $(ABCD) = -1$, то $\frac{(ABC)}{(ABD)} = -1$ или $(ABC) =$

$= -(ABD)$, а это и есть признак гармонического расположения пар.

Т₁. Если одновременно поменять местами две пары букв в символе ангармонического отношения, то числовое значение отношения не изменится:

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA).$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Пусть } (ABCD) &= \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}} = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{DA}} = k. \\ \text{Тогда } (BADC) &= \frac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{DA}} : \frac{\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{CA}} = \frac{\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB}} = k. \\ (CDAB) &= \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AD}} : \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BD}} = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB}} = k. \\ (DCBA) &= \frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{AC}} = \frac{\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{DA}} = k. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{При доказа-} \\ \text{тельстве этих} \\ \text{равенств мы не-} \\ \text{сколько раз ме-} \\ \text{няли знаки век-} \\ \text{торов на обрат-} \\ \text{ные. Но так как} \\ \text{число перемен-} \\ \text{было четное, то} \\ \text{знак оконча-} \\ \text{тельного ре-} \\ \text{зультата остал-} \\ \text{ся неизменным.} \end{array}$$

Наиболее важное свойство ангармонического отношения, определяющее инвариантный характер этого выражения, дается следующей теоремой.

Т₂. Если пучок четырех прямых a, b, c, d пересечь произвольной секущей, то сложное отношение четырех точек пересечения не зависит от положения секущей и называется ангармоническим (сложным) отношением четырех прямых пучка, которое обозначается символом $(abcd)$.

Пусть прямые a, b, c и d пересекаются в точке S и в пересечении с прямой l дают точки A, B, C, D , в пересечении же с другой прямой l' они дают соответственно точки A', B', C', D' (рис. 70). Проведем через точки B и B' две прямые, параллельные a . Первая из них пересечет прямые c и d соответственно в точках M и N , вторая пересечет те же прямые в точках M' и N' . Рассматривая гомотетию с центром C , получим: $\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{BM}}$. Рассматривая гомотетию с

центром D , получим: $\frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}} = \frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{BN}}$. Деля почленно полученные равенства, найдем:

$$\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}} = \frac{\overrightarrow{BN}}{\overrightarrow{BM}}.$$

Гомотетии с центрами C' и D' дают аналогичное равенство: $\frac{\overrightarrow{C'A'}}{\overrightarrow{C'B'}} : \frac{\overrightarrow{D'A'}}{\overrightarrow{D'B'}} = \frac{\overrightarrow{B'N'}}{\overrightarrow{B'M'}}$. Наконец, из гомотетии с центром S получим: $\frac{\overrightarrow{BN}}{\overrightarrow{BM}} = \frac{\overrightarrow{B'N'}}{\overrightarrow{B'M'}}$. Поэтому $\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}} = \frac{\overrightarrow{C'A'}}{\overrightarrow{C'B'}} : \frac{\overrightarrow{D'A'}}{\overrightarrow{D'B'}}$ и, наконец, $(ABCD) = (A'B'C'D') = (abcd)$.

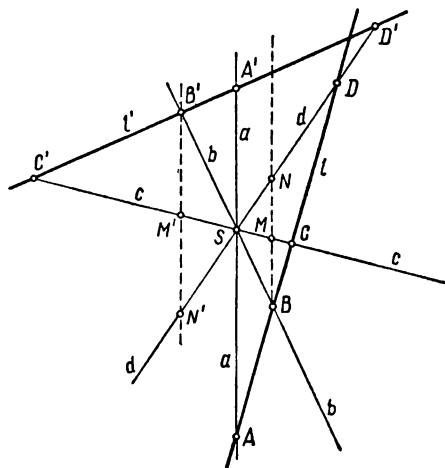


Рис. 70

D₂. Точки A' , B' , C' , D' называются *центральными проекциями* точек A , B , C , D на прямую l' из точки S . Имея это в виду, мы можем сказать:

C₃. Сложное отношение четырех точек есть инвариант центрального проектирования.

T₂. При всевозможных перестановках букв в символе ангармонического отношения оно может принять шесть различных значений.

Пусть мы имеем сложное отношение $(ABCD)$ четырех точек на прямой l . Пересечем эти точки пучком прямых a, b, c, d с вершиной S и получим $(abcd) = (ABCD)$. Проведем теперь другую секущую l' , параллельную прямой d . Прямые a, b, c, d определяют на прямой l' точки A', B', C', D'_∞ , причем $(A'B'C'D'_\infty) = (A'B'C') = (ABCD)$.

Перестановки букв в символе $(A'B'C')$ дают следующие числовые значения:

$$(A'B'C') = (ABCD) = k \cdot (B'A'C') = (BACD) = \frac{1}{k} \cdot (A'C'B') = \\ = (ACBD) = 1 - k.$$

$$(C'A'B') = (CABD) = \frac{1}{k-1} \cdot (B'C'A') = (BCAD) = 1 - \frac{1}{k}.$$

$$(C'B'A') = (CBAD) = \frac{k}{k-1}.$$

Если в каждом из четырех сложных отношений $(ABCD)$, $(BACD)$, $(ACBD)$, $(CABD)$, $(BCAD)$ и $(CBAD)$ произвести одновременные перестановки двух пар букв, то числовые значения отношений не изменятся. Но в каждом из этих шести отношений таких перестановок можно произвести четыре. Итак, все 24 перестановки в символе $(ABCD)$ дают только шесть числовых значений.

С₄. Если дано положение трех точек на прямой и дано числовое значение ангармонического отношения, то положение четвертой точки определяется однозначно.

Пусть на прямой дано положение двух базисных точек A и B и одной делящей точки D . Дано также числовое значение $(ABCD) = k$. Требуется найти положение первой делящей точки C . Оно определяется соотношением: $(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)}$, откуда $(ABC) = k(ABD)$.

Так как значение простого отношения (ABD) известно, то, согласно ранее доказанному, положение точки C этим однозначно определено. Если бы искомая точка оказалась не первой делящей, то перестановкой букв в символе $(ABCD)$ мы всегда можем сделать так, чтобы искомая точка оказалась первой делящей.

6.4. Введем теперь ряд новых понятий, необходимых для изучения круговых преобразований.

Т₁. Если через какую-нибудь точку провести секущую к окружности, то произведение отрезков этой секущей от данной точки до окружности есть величина постоянная,

независимая от положения секущей и называемая степенью точки относительно окружности.

Для доказательства достаточно через данную точку M провести две секущие и показать, что соответствующие произведения $\overline{MA} \cdot \overline{MA'}$ и $\overline{MB} \cdot \overline{MB'}$ равны между собой (рис. 71). В силу равенства углов при вершине M

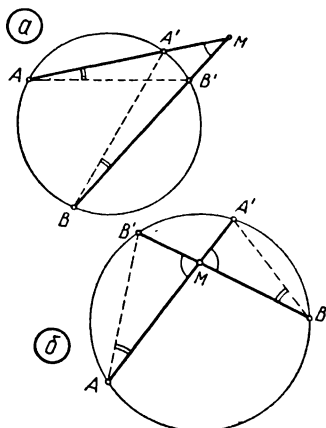


Рис. 71

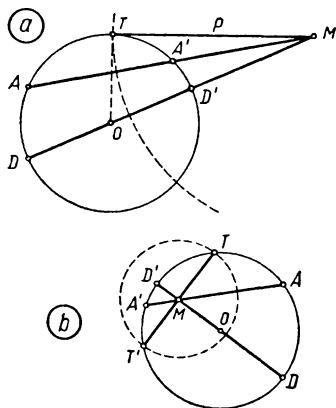


Рис. 72

и равенства вписанных углов при вершинах A и B имеем: $\triangle AMB' \sim \triangle BMA'$. Поэтому $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{MB'}}{\overline{MA'}}$, или $\overline{MA} \cdot \overline{MA'} = \overline{MB} \cdot \overline{MB'} = \text{const.}$

Д₁. Если M — внешняя точка (рис. 71, а), то отрезки \overline{MA} и $\overline{MA'}$, \overline{MB} и $\overline{MB'}$ и. т. д. имеют одинаковое направление и степень считается положительной $\overline{MA} \cdot \overline{MA'} = r^2$. Если M — внутренняя точка, то отрезки имеют противоположное направление и степень считается отрицательной (рис. 71, б): $\overline{MA} \cdot \overline{MA'} = -r^2$. Если точка M принадлежит окружности, то степень считается равной нулю.

С₁. Если M — внешняя точка, то степень равна квадрату касательной от M до точки касания T (рис. 72, а). Если M — внутренняя точка, то степень по абсолютной величине равна квадрату наименьшей полухорды, проходящей через M (рис. 72, б).

В первом случае, вращая секущую около точки M , мы можем добиться того, что точки A и A' будут сближаться друг с другом и в предельном положении сольются в точке касания T и мы получим $\overline{MA} \cdot \overline{MA'} = \overline{MT}^2$. Во втором случае, вращая секущую около точки M , мы приведем ее в положение перпендикуляра к OM . Тогда хорда $\overline{TT'}$ станет наименьшей и мы получим $\overline{MA} \cdot \overline{MA'} = \overline{MT} \cdot \overline{MT'} = = -\overline{MT}^2$.

С₂. Если M — внешняя точка, то, описав из центра M окружность радиусом, равным \overline{r} , получим окружность, пересекающую данную под прямым углом. Она называется *ортogonalной* окружностью для данной.

Если M — внутренняя точка, то, описав из центра M окружность радиусом, равным \overline{r} , получим окружность, которую данная окружность пересекает в двух диаметрально противоположных точках. Она называется *диаметральной* окружностью для данной.

В первом случае (рис. 72, а) окружность с радиусом $\overline{r} = \overline{MT}$ построена так, что MT есть касательная к окружности с центром O , поэтому $OT \perp MT$ и, значит, OT есть тоже касательная к окружности с центром M . Итак, касательные в точке пересечения окружностей — T взаимно перпендикулярны, т. е. угол между окружностями прямой.

Во втором случае окружность с радиусом $\overline{r} = \overline{MT}$ (рис. 72, б) пройдет через диаметрально противоположную точку T' и потому будет диаметральной.

С₃. Если M — данная точка, \overline{r} и O — радиус и центр данной окружности, то при любом положении точки M степень ее относительно этой окружности определяется формулой:

$$p^2 = \overline{MO}^2 - \overline{r}^2. \quad (1)$$

Проведем секущую через данную точку M и центр O . Если M — внешняя точка (рис. 72, а), то получим:

$$p^2 = \overline{MD} \cdot \overline{MD'} = (\overline{MO} + \overline{r})(\overline{MO} - \overline{r}) = \overline{MO}^2 - \overline{r}^2.$$

Если M — внутренняя точка (рис. 72, б), то получим:
 $-p^2 = \overline{MD} \cdot \overline{MD'} = (\overline{r} + \overline{MO})(\overline{r} - \overline{MO}) = \overline{r}^2 - \overline{MO}^2$, или по-прежнему $p^2 = \overline{MO}^2 - \overline{r}^2$.

что и степени точки Q' относительно обеих окружностей одинаковы, чего быть не может, так как Q — единственная точка прямой O_1O_2 , обладающая этим свойством. Итак, прямая l есть искомая радикальная ось.

С₁. Если окружности пересекаются, то их радикальная ось проходит через точки пересечения. Если они касаются, то их радикальная ось совпадает с касательной, проходящей через точку касания.

С₂. Каждая точка радикальной оси, если она лежит вне окружностей, есть центр окружности, пересекающей ортогонально две данные окружности. Такова, например, точка M на рисунке 73.

Т₂. Если центры трех окружностей не лежат на одной и той же прямой, то три радикальные оси этих окружностей пересекаются в одной и той же точке, называемой радикальным центром этих окружностей.

Пусть даны окружности с центрами O_1, O_2, O_3 (рис. 74). Так как эти точки не лежат на одной и той же прямой, то их радикальные оси, соответствующие парам O_2 и O_3, O_3 и O_1, O_1 и O_2 , т. е. прямые l_1, l_2, l_3 , не параллельны. Положим, что оси l_1 и l_2 пересекаются в точке S . Тогда эта точка имеет одну и ту же степень относительно пар O_2 и O_3, O_3 и O_1 . Но отсюда следует, что она имеет одну и ту же степень относительно пары O_1 и O_2 , т. е. что она лежит также и на оси l_3 . Итак, S есть радикальный центр трех окружностей.

Если бы центры данных окружностей лежали на одной и той же прямой, то радикальные оси оказались бы параллельными друг другу. В этом случае принимают, что радикальным центром является S_∞ — общая несобственная точка радикальных осей.

Существование радикального центра трех окружностей

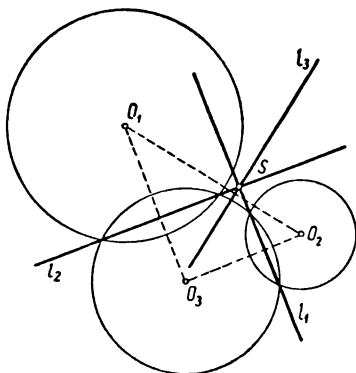


Рис. 74

дает возможность легко построить радикальную ось непесекающихся окружностей.

Пусть, например, окружности с центрами O_1 и O_2 не имеют общих точек (рис. 74). Пересечем их произвольной окружностью с центром O_3 . Радикальные оси l_1 и l_2 , пересекаясь, определяют центр S . Проведя через точку S перпендикуляр к прямой O_1O_2 , получим искомую радикальную ось l_3 .

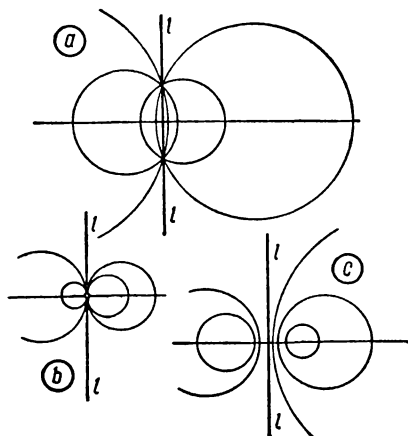


Рис. 75

имеют одну общую точку, пучок называется *параболическим* (рис. 75, b), если окружности пучка не имеют общих точек, пучок называется *гиперболическим* (рис. 75, c).

Общую радикальную ось пучка можно рассматривать как выродившуюся окружность пучка — окружность с несобственным центром. Общие точки окружностей пучка называются *основными*.

С₁. *Две окружности определяют единственный пучок.*

Это совершенно очевидно, если окружности пересекаются или касаются. Если же окружности не имеют общих то-

6.6. Изучим теперь некоторые системы окружностей.

Д₁. *Множество окружностей, имеющих одну и ту же радикальную ось, называется пучком окружностей. Если все окружности пучка имеют две общие точки, пучок называется эллиптическим (рис. 75, a), если окружности пучка*

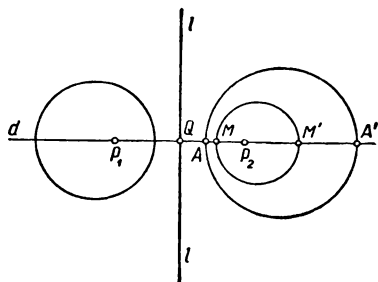


Рис. 76

чек, то найдем их радикальную ось l и обозначим через Q точку пересечения l с линией центров d (рис. 76), а через A и A' точки пересечения одной из окружностей с прямой d . Произведение $\overline{QA} \cdot \overline{QA'}$ должно быть одно и то же для всех окружностей пучка. Поэтому, обозначив через M точку одной из искомых окружностей на прямой d , вторую точку — M' — этой окружности найдем из равенства $\overline{QM'} \cdot \overline{QM} = \overline{QA'} \cdot \overline{QA}$. Если окажется, что M' совпадет с M , то искомая окружность стягивается в точку — это будет одна из нулевых окружностей гиперболического пучка (точки P_1 и P_2 на рис. 76).

В том случае, когда окружности окажутся концентрическими, за гиперболический пучок принимается все множество окружностей с тем же центром, радикальной же осью этого пучка считается несобственная прямая плоскости.

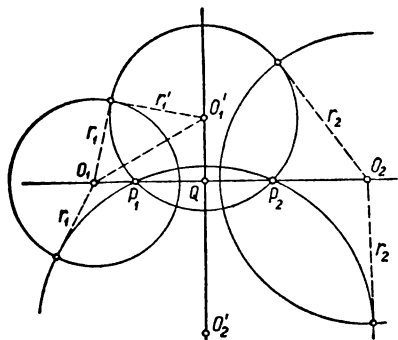


Рис. 77

Т₁. Множество окружностей, ортогональных ко всем окружностям данного пучка, образует новый пучок, который называется *ортогональным к данному*. Радикальная ось каждого из двух взаимно ортогональных пучков есть линия центров другого пучка.

Положим, что нам дан пучок, определяемый окружностями с центрами O_1 и O_2 (рис. 77). Найдем его радикальную ось и возьмем на ней точки O_1' и O_2' , лежащие вне данных окружностей. Эти точки имеют одну и ту же степень относительно обеих окружностей, а потому они служат центрами окружностей, пересекающих две данные окружности ортогонально. Вместе с тем в силу взаимной ортогональности точка O_1 имеет одну и ту же степень, равную r_1^2 относительно окружностей с центрами O_1' и O_2' , так как радиус r_1 есть в то же время и длина касательной. И точно так же точка O_2 имеет одну и ту же степень r_2^2 относительно тех же окружностей. Значит, линия центров O_1O_2 есть

радикальная ось пучка, определяемая окружностями с центрами O_1' и O_2' . Обозначая теперь через Q центральную точку пучков (т. е. пересечения радикальной оси с линией центров), получим по теореме Пифагора:

$$\overline{O_1 O_1'}^2 = \overline{QO_1'}^2 + \overline{QO_1'}^2 = \overline{r_1'}^2 + \overline{r_1'}^2,$$

или

$$\overline{QO_1'}^2 - \overline{r_1'}^2 = -(\overline{QO_1'}^2 - \overline{r_1'}^2).$$

Это показывает, что если степень точки Q относительно окружностей одного пучка положительна, то относительно окружностей другого пучка она отрицательна. Отсюда

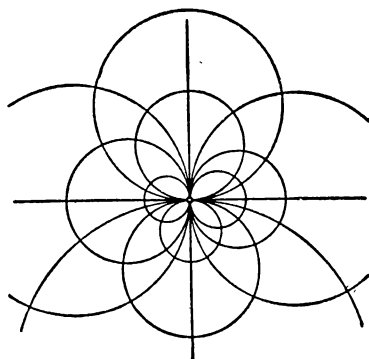


Рис. 78

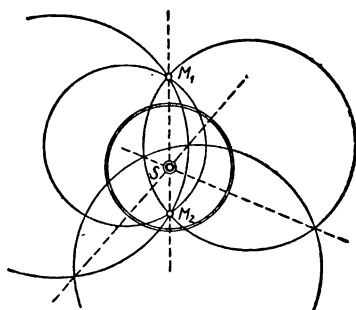


Рис. 79

следует, что если точка Q лежит внутри всех окружностей одного пучка, то она лежит вне всех окружностей другого, т. е. если один из пучков эллиптический, то ортогональный пучок — гиперболический. При этом основные точки эллиптического пучка являются нулевыми окружностями гиперболического пучка (точки P_1 и P_2 на рис. 77).

Очевидно, пучок, ортогональный параболическому, есть также параболический (рис. 78).

Д₂. Множество окружностей, имеющих один и тот же радикальный центр, называется связкой. Степень этого центра относительно всех окружностей называется степенью связки. Если степень отрицательна, центр находится внутри всех окружностей и связка называется эллиптической (рис. 79). Если степень

равна нулю, то все окружности проходят через этот центр и связка называется *параболической* (рис. 80). Если степень центра положительна, то он находится вне окружностей связки и связка называется *гиперболической* (рис. 81).

C_2 . В эллиптической связке существует единственная окружность, которая пересекается диаметрально всеми окружностями связки (рис. 79). В гиперболической связке

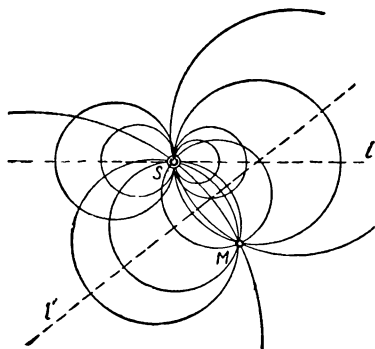


Рис. 80

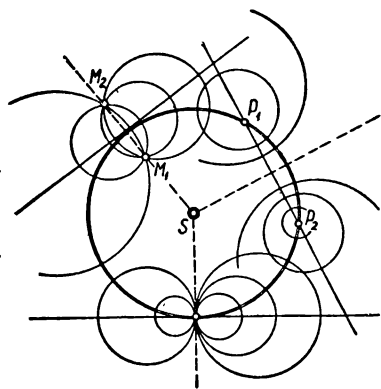


Рис. 81

существует единственная окружность, которая пересекается ортогонально всеми окружностями связки (рис. 81). И в том и в другом случае окружности проводятся радиусом \overline{p} ($-p^2$ и p^2 — степени связок) из центра S связки.

Заметим, что в состав эллиптической связки могут входить только эллиптические пучки, в состав параболической связки — эллиптические и параболические пучки, в состав гиперболической связки — эллиптические, параболические и гиперболические пучки. Необходимо также иметь в виду, что каждой из этих связок принадлежат и все прямые, проходящие через центр связки. Каждую из таких прямых можно рассматривать как окружность с несобственным центром.

6.7. Все то, что в предыдущем изложении сказано про окружность, можно распространить и на сферу.

Степенью точки относительно сферы называется произведение отрезков секущей от данной точки

до точек пересечения со сферой. Пересекая сферу различными плоскостями, проходящими через данную точку, нетрудно убедиться, что степень этой точки будет одна и та же для всех окружностей, которые получаются от пересечения сферы этой плоскостью. Для точек внешних относительно сферы степень положительна, для точек самой сферы — равна нулю. Так же как и для окружностей: степень точки M относительно сферы с центром O и радиусом r выражается общей формулой:

$$p^2 = \overline{MO}^2 - r^2.$$

Если из центра M описать сферу радиусом, равным p , то в случае внешней точки эта сфера пересечет данную сферу ортогонально.

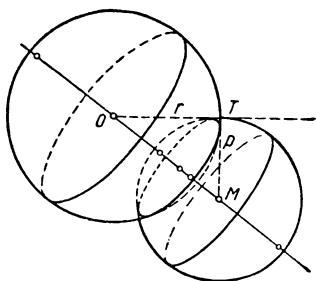


Рис. 82

Это значит, что касательные плоскости в точке, общей обеим сферам, перпендикулярны друг к другу. Например, на рисунке 82 изображены две взаимно ортогональные окружности с центрами O и M . Если эту фигуру вращать около линии центров OM , то окружности опишут сферы с теми же центрами. Плоскости, проходящие через прямые OT и MT перпендикулярно к

плоскости чертежа, будут касательными к сферам, линейный угол между ними ($\angle OTM$) прямой и, значит, плоскости взаимно перпендикулярны.

Если же M — внутренняя точка, то сфера с центром M и радиусом p пересекается данной сферой диаметрально, т. е. линия пересечения сфер есть окружность большого круга на сфере с центром M .

Далее мы получаем:

Т₁. Геометрическое место точек, имеющих одну и ту же степень относительно двух данных сфер, есть плоскость, называемая радикальной плоскостью этих сфер.

Чтобы убедиться в этом, достаточно фигуру на рисунке 73 вращать около линии центров O_1O_2 данных окружностей. При этом окружности опишут сферы с теми же центрами, а радикальная ось l опишет плоскость, перпендикулярную к линии центров.

Каждая точка этой плоскости имеет одну и ту же степень относительно обеих сфер, т. е. это есть их радикальная плоскость.

Т₂. Если центры трех сфер не лежат на одной и той же прямой, то три их радикальные плоскости пересекаются по одной и той же прямой, называемой радикальной осью этих сфер. Радикальная ось есть геометрическое место точек, степень которых одна и та же относительно всех трех сфер.

Так как центры трех сфер не лежат на одной и той же прямой, то радикальные плоскости их не параллельны. Какие-нибудь две из этих плоскостей пересекаются по прямой l , все точки которой имеют одну и ту же степень относительно всех трех сфер. Поэтому и третья радикальная плоскость пройдет через ту же прямую.

Т₃. Если центры четырех сфер не лежат в одной и той же плоскости, то шесть радикальных плоскостей этих сфер проходят через одну и ту же точку, называемую радикальным центром этих сфер.

Обозначим через O_1, O_2, O_3, O_4 центры этих сфер. Радикальные оси троек O_1, O_2, O_3 и O_2, O_3, O_4 лежат в одной и той же радикальной плоскости сфер O_2 и O_3 . Точка S их пересечения имеет одинаковую степень относительно всех четырех сфер, поэтому через нее проходят и все радикальные оси и все радикальные плоскости этих сфер.

6. 8. D₁. *Множество сфер, имеющих одну и ту же радикальную плоскость, называется пучком сфер. Если радикальная плоскость пересекает сферы пучка, то он называется эллиптическим; если касается их — параболическим; если проходит вне их — гиперболическим.*

Все виды пучков можно получить, вращая соответствующие пучки окружностей около их линии центров. При этом окружности пучка опишут сферы, а их радикальные оси опишут радикальные плоскости пучков.

D₂. *Множество сфер, имеющих одну и ту же радикальную ось, называется связкой сфер. Если ось пересекает сферы связки, связка называется эллиптической; если касается их — параболической, если проходит вне их — гиперболической.*

Представление о связке сфер легко получить, рассматривая соответствующие связки окружностей (рис. 79, 80, 81), в которой каждую окружность нужно рассматривать

как диаметральное сечение сферы, а радикальную ось — как перпендикуляр, проходящий к плоскости чертежа через центр связи.

Д₃. Множество сфер, имеющих общий радикальный центр, называется сетью сфер. Общая степень центра относительно всех сфер называется степенью сети. Сеть называется эллиптической, если центр лежит внутри сфер; параболической, если все сферы проходят через центр; гиперболлической, если центр лежит вне сфер.

Центр эллиптической сети есть центр сферы, пересекаемой всеми сферами диаметрально. Центр гиперболлической сети есть центр сферы, пересекаемой всеми сферами ортогонально.

Упражнения

1. Доказать, что две прямые и две биссектрисы углов между ними образуют гармонический пучок прямых.

2. Прямые, проходящие через центр параллелограмма параллельно его сторонам, гармонически разделяют его диагонали.

3. Доказать, что концы биссектрис внутреннего и внешнего углов треугольника (с общей вершиной) гармонически разделяют вершины противоположной стороны.

4. Доказать, что геометрическое место точек, отношение расстояний которых от двух данных точек постоянно и не равно единице, есть окружность. Она называется о к р у ж н о с т ь ю А п о л л о н и я¹.

5. Концы диаметров двух взаимно ортогональных окружностей гармонически разделяют друг друга.

6. На прямой даны две пары точек: A, B и C, D . Построить третью пару точек M, N , которая гармонически разделяла бы данные две пары.

7. Дан треугольник ABC . Прямая l пересекает прямые BC, CA и AB соответственно в точках X, Y, Z . Доказать, что $(BCX)(CAY)(ABZ) = 1$.

Доказать обратное предложение (оно называется теоремой Менелая)².

8. Дан треугольник ABC и в его плоскости дана точка S . Прямые SA, SB и SC пересекают прямые BC, CA и AB соответственно в точках X, Y, Z . Доказать, что $(BCX)(CAY)(ABZ) = -1$.

¹ А п о л л о н и й П е р г и й с к и й (около III в. до н. э.) — греческий геометр, который подробно разработал теорию конических сечений.

² М е н е л а й (около 100 г. н. э.) — греческий геометр. Жил и работал в Риме. Ему принадлежит работа по геометрии сферы.

Доказать обратное предложение (теорема Чевы — итальянского геометра XVI столетия)¹.

9*. На окружности даны точки A, B, C и D . Из произвольной точки S той же окружности проведены прямые $SA \equiv a, SB \equiv b, SC \equiv c$ и $SD \equiv d$, образующие пучок. Доказать, что ангармоническое отношение $(abcd) = k$ не зависит от выбора точки S . Это число k называется ангармоническим отношением четырех точек окружности и обозначается $(ABCD)$.

10. Даны два пучка прямых: a, b, c, d с вершиной S и a', b', c', d' с вершиной S' . Доказать, что если $(abcd) = (a'b'c'd')$ и $a \equiv a'$, то три точки bb', cc' и dd' лежат на одной и той же прямой.

11. Из трех данных точек, как из центров, провести три окружности, взаимно ортогональные друг с другом.

12. Рассматривая точку как нулевую окружность, доказать, что пучок окружностей определяют: а) две точки; б) точка и прямая (радикальная ось); в) точка и окружность.

13. Доказать, что два центра гомотетии двух окружностей являются концами диаметра окружности, принадлежащей пучку, определяемому данными окружностями.

14. Нулевые окружности пучка гармонически разделяют концы диаметра каждой окружности этого пучка.

15. Построить окружность, проходящую через две данные точки и касательную к другой данной окружности.

16. Построить окружность, общую двум пучкам одной и той же связи.

17. Доказать, что через каждую точку плоскости, не являющейся основной точкой пучка, проходит одна и только одна окружность этого пучка.

18. Построить пучок окружностей, общий двум связкам.

19. Множество сфер, ортогональных ко всем сферам данной связи, образует пучок сфер, радикальная плоскость которого совпадает с плоскостью центров сфер данной связи. Доказать.

20. Доказать, что множество сфер, общих двум данным сетям сфер, образует связку сфер. Эта связка — единственная для двух данных сетей.

Глава 7

ИНВЕРСИЯ

7. 1. Перейдем теперь к изучению нового преобразования, которое уже не является линейным, так как оно может преобразовать прямую в окружность.

Д₁. *Инверсией называется преобразование, при котором задается постоянная точка I — центр инверсии и*

¹ Заметим, что теорема Чевы остается справедливой и для того случая, когда три прямые не пересекаются в точке S , а параллельны (т. е. имеют общую несобственную точку).

две точки P и P' при условии, что $I \in PP'$ и каждая точка A преобразуется в соответственную так, чтобы выполнялось соотношение $I, PA \sim I, A'P'$.

Если центр I лежит вне отрезка $\overline{PP'}$, то инверсия называется гиперболической (рис. 83, а), если I лежит между P и P' , то инверсия называется эллиптической (рис. 83, б).

Напомним, что знак « \sim » противоположен знаку « \simeq »¹ и обозначает несобственное подобие. Это значит, что тройки точек I, P, A и I, A', P' противоположно ориентированы по отношению друг к другу: если одну из этих троек, например I, A', P' , преобразовать в симметричную относительно оси, то получим тройку точек, подобно расположенную с тройкой I, P, A . Прямые AP и $A'P'$, образующие равные, но противоположно ориентированные углы с лучами IA и IP , называются антипараллельными.

Т₁. Произведение расстояний от центра инверсии до двух соответственных точек есть величина постоянная, называемая степенью инверсии.

На основании определения имеем: $\triangle IPA \sim \triangle IA'P'$ (рис. 83). Отсюда получим пропорцию:

$$\frac{\overline{IP}}{\overline{IA'}} = \frac{\overline{IA}}{\overline{IP'}}, \text{ т. е. } \overline{IA} \cdot \overline{IA'} = \overline{IP} \cdot \overline{IP'} = \text{const.}$$

При гиперболической инверсии векторы \vec{IP} и $\vec{IP'}$, \vec{IA} и $\vec{IA'}$ сонаправлены, и степень считается положительной (p^2).

При эллиптической инверсии соответственные векторы противоположны, и степень считается отрицательной ($-p^2$).

¹ Знак « \simeq » произошел от буквы S — начальной буквы латинского слова *similis* — подобный.

Если, обратно, две точки B и B' , лежащие на одной и той же прямой с центром I , удовлетворяют условию $\overline{IB} \cdot \overline{IB'} = \overline{IP} \cdot \overline{IP'}$, то отсюда следует, что $\frac{\overline{IP}}{\overline{IB'}} = \frac{\overline{IB}}{\overline{IP'}}$, т. е. что $\triangle IPB \sim \triangle IB'P'$ и, значит, точки B и B' взаимны в инверсии, определяемой центром I и точками P и P' .

Отсюда следует, что инверсия вполне определяется центром и степенью.

D₂. Символически преобразование точки A в A' инверсией с центром I и степенью p^2 или $-p^2$ записывается так:
 $I_{p^2}(A) \equiv A'$ или $-I_{-p^2}(A) \equiv A'$.

C₁. Если $I_q(A) \equiv A'$, то и $I_q(A') \equiv A$ (где $q = p^2$ или $-p^2$).

Это есть непосредственное следствие равенства $\overline{IA} \cdot \overline{IA'} = q$, в которое точки A и A' входят совершенно симметрично.

На основании этих свойств инверсии получают способы построения взаимных в инверсии точек. Рассмотрим сначала гиперболическую инверсию.

а) Опишем из центра I радиусом, равным p , окружность, которая называется *о к р у ж н о с т ь ю и н в е р с и и* (рис. 84). Пусть A — внешняя точка. Построим на отрезке \overline{IA} как на диаметре полуокружность, которая пересечет окружность инверсии в точке P . По известному свойству прямоугольного треугольника IPA получим, опустив перпендикуляр PA' на гипотенузу: $\overline{IA} \cdot \overline{IA'} = \overline{IP}^2 = p^2$, т. е. точка A' — искомая. Если сначала будет дана внутренняя точка A' , то, проведя перпендикуляр PA' , найдем точку P и потом получим точку A , проведя $PA \perp IP$.

б) Укажем еще одно построение, которое интересно тем, что его можно выполнить одним лишь циркулем, не прибегая к линейке. Пусть мы опять имеем окружность инверсии с центром I и точку A . Из центра A опишем окружность радиусом \overline{AI} , которая пересечет окружность инверсии в точках P и P' , симметричных относительно оси AI (рис. 85). Из центров P и P' радиусами, равными \overline{PI} , опишем окружности, которые пересекутся в точке A' , лежащей на оси симметрии IA , так как $A'P = A'P'$;

$\triangle IAP \sim \triangle IPA'$ в силу того, что треугольники равнобедренные и $\angle PIA = \angle PIA'$. Итак,

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{IP}} = \frac{\overline{IP}}{\overline{IA'}}, \text{ т. е. } \overline{IA} \cdot \overline{IA'} = \overline{IP}^2 = p^2.$$

в) Можно, наконец, построить инструмент, при помощи которого непосредственно осуществляется гиперболическая инверсия. Прибор этот, называемый инверсором, представляет из себя шарнирный ромб, сочлененный с двумя равными стержнями, закрепленными в центре I (рис. 86).

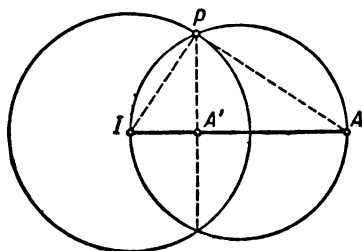


Рис. 84

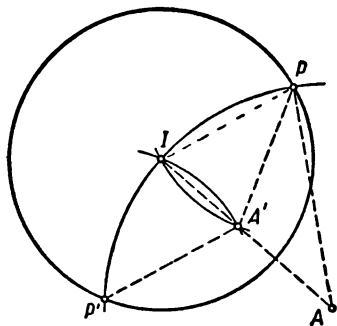


Рис. 85

В силу равенств $\overline{AP} = \overline{AP'}$, $\overline{A'P} = \overline{A'P'}$, $\overline{IP} = \overline{IP'}$, точки A, A', I лежат на одной и той же прямой — оси симметрии точек P и P' . Из треугольника IPA получим: $(\overline{IP})^2 = (\overline{AP})^2 + (\overline{IA})^2 - 2\overline{IA} \cdot \overline{QA}$ или $(\overline{IP})^2 - (\overline{AP})^2 = \overline{IA} (\overline{IA} - 2\overline{QA})$, но $2\overline{QA} = \overline{A'A}$, поэтому $\overline{IA} - \overline{A'A} = \overline{IA'}$.

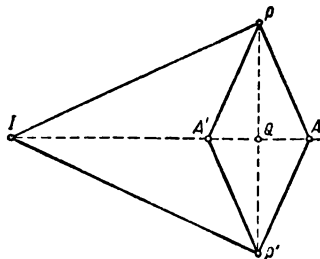


Рис. 86

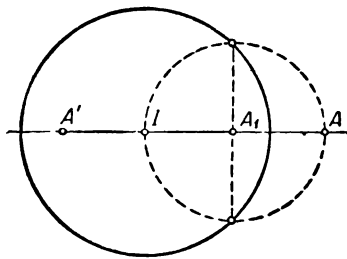


Рис. 87

Итак, $\overline{IA} \cdot \overline{IA'} = (\overline{IP})^2 - (\overline{AP})^2 = r^2$, т. е. точки A и A' взаимны в инверсии с центром I и степенью $r^2 = (\overline{IP})^2 - (\overline{AP})^2$.

Если бы мы захотели преобразовать точку A в A' при помощи эллиптической инверсии с центром I и степенью $-r^2$, то можно было бы сначала гиперболической инверсией с тем же центром и степенью r^2 преобразовать точку A в точку A_1 , а потом взять точку A' , центрально симметричную с A_1 относительно центра I (рис. 87).

7. 2. Из определения инверсии получается ряд важных предложений.

Т₁. *Неподвижными элементами в преобразовании инверсии являются прямые и окружности, проходящие через две взаимные в преобразовании точки.*

Пусть мы имеем гиперболическую инверсию с центром I и степенью r^2 (рис. 88), $I_{r^2}(A) \equiv A'$.

Очевидно, прямая AA' этой инверсией преобразуется сама в себя, так как любая точка этой прямой преобразуется в точку той же прямой. Центр I при этом преобразуется в несобственную точку прямой¹.

Проведем окружность через точки A и A' . Так как степень точки I относительно этой окружности равна r^2 , то для любой секущей, проведенной из точки I , например для IB , мы получим $\overline{IB} \cdot \overline{IB'} = r^2$. Итак, каждая точка полученной окружности преобразуется в точку той же окружности. А так как радиус окружности инверсии равен r , то окружности взаимно ортогональны. Отсюда также следует, что любая окружность, ортогональная к окружности гиперболической инверсии, преобразуется сама в себя.

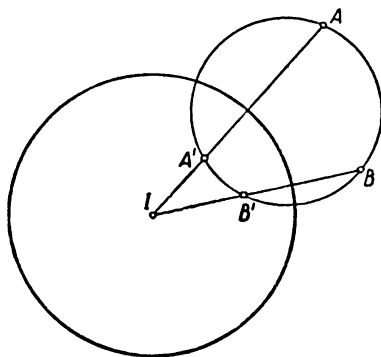


Рис. 88

¹ Заметим, что в целях сохранения взаимной однозначности преобразования инверсии принято считать, что все прямые плоскости проходят через одну и ту же несобственную точку, в которую преобразуется точка I .

Вместе с тем точки самой окружности гиперболической инверсии являются неподвижными, так как если $\overline{IA} = p$, то и $\overline{IA'} = p$.

В случае эллиптической инверсии с центром I и степенью $-p^2$ (рис. 89) имеем $I_{-p^2}(A) \equiv A'$. Рассуждениями, совершенно аналогичными с предыдущими, легко установить, что окружность, проходящая через точки A и A' , преобразуется сама в себя, только теперь степень точки I относительно этой окружности отрицательна и потому окружность инверсии пересекает полученную окружность диаметрально.

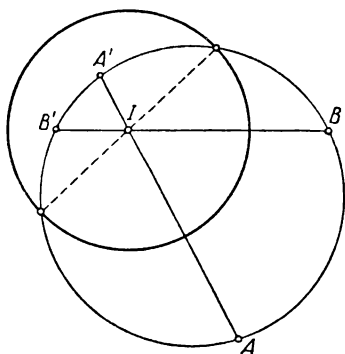


Рис. 89

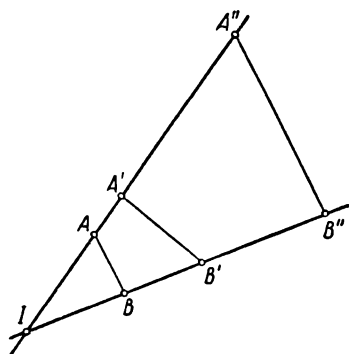


Рис. 90

Очевидно также, что и все окружности, пересекаемые окружностью инверсии диаметрально, преобразуются в самих себя. Неподвижных точек в эллиптической инверсии нет, так как соответственные точки находятся по разные стороны от точки I . Каждая точка окружности эллиптической инверсии преобразуется в диаметрально противоположную точку той же окружности, если $\overline{IA} = p$, $\overline{IA'} = -p$, $\overline{IA} \cdot \overline{IA'} = -p^2$.

Итак, все неподвижные окружности в гиперболической инверсии образуют гиперболическую связку с радикальным центром I и степенью p^2 ; все неподвижные окружности эллиптической инверсии образуют эллиптическую связку с радикальным центром I и степенью $-p^2$.

Т₂. Две последовательные инверсии с общим центром эквивалентны одной гомотетии с тем же центром.

Рассмотрим две инверсии с одним и тем же центром I и со степенями инверсии q и q' (рис. 90). Пусть $I_q(A) \equiv A'$, $I_q(B) \equiv B'$; $I_{q'}(A') \equiv A''$, $I_{q'}(B') \equiv B''$. Так как $\angle IAB = \angle IB'A'$ и $\angle IB'A' = \angle IA''B''$, то $\angle IAB = \angle IA''B''$, т. е. углы эти равны и одинаково ориентированы. Значит, $AB \parallel A''B''$ и мы имеем гомотетию. Так как $\overline{IA} \cdot \overline{IA'} = q, \overline{IA'} \cdot \overline{IA''} = q'$, то $\frac{\overline{IA''}}{\overline{IA}} = \frac{q'}{q} = k$, т. е. коэффициент гомотетии равен частному степеней инверсий.

Т₃. *Осевая симметрия есть частный случай гиперболической инверсии, если ось симметрии рассматривать как окружность инверсии с несобственным центром.*

Положим, что инверсия задана точками P и P' и несобственной точкой I_∞ на прямой PP' (рис. 91). Возьмем точку A на прямой, проходящей через центр I_∞ , т. е. параллельной прямой PP' . По общему правилу строим прямую $P'A'$, антипараллельную PA , а для этого строим угол $\angle IP'A'$ равный, но противоположно ориентированный углу $\angle IB'A'$.

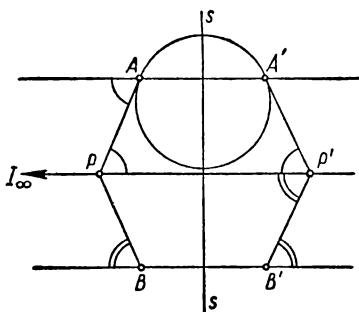


Рис. 91

В результате получим, что прямые AP и $P'A'$ будут симметричны относительно прямой s — оси симметрии точек P и P' , а значит, будут симметричны и точки A и A' . Окружность, проходящая через точки A и A' ортогональна к своей диаметральной прямой s , которая здесь играет роль окружности инверсии с несобственным центром I_∞ . Таким образом, осевая симметрия обладает рядом признаков, характеризующих гиперболическую инверсию.

7. 3. Во всей теории инверсии особо важную роль играют преобразования прямой и окружности.

Т₁. *Инверсия преобразует прямую, не проходящую через центр инверсии, в окружность, проходящую через центр инверсии. Обратно, окружность, проходящая через центр инверсии, преобразуется в прямую, не проходящую через центр инверсии.*

Пусть I — центр данной инверсии (рис. 92), a — данная прямая. Проведем перпендикуляр IP к прямой a и положим, что инверсия определена парой точек P и P' . Точка A на прямой a преобразуется в точку A' так, что имеет место равенство $\angle IPA = \angle IA'P' = 90^\circ$. Итак, если точка A будет пробегать по прямой a , соответственная точка A' будет находиться в вершине прямого угла, опирающегося на $\overline{IP'}$, т. е. она будет описывать окружность с диаметром $\overline{IP'}$.

Ввиду того что инверсия взаимно преобразует точки A и A' друг в друга, нетрудно доказать, что и, обратно,

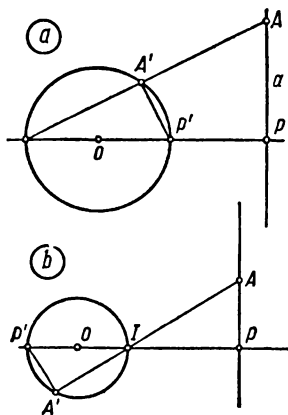


Рис. 92

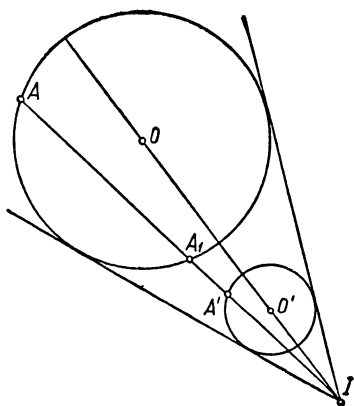


Рис. 93

окружность, проходящая через центр инверсии, преобразуется в прямую, не проходящую через этот центр.

С₁. Прямая и окружность всегда определяют инверсию, которая преобразует их друг в друга.

Чтобы найти эту инверсию, нужно провести перпендикуляр OP из центра окружности к данной прямой. Этот перпендикуляр определяет диаметр окружности, один из концов которого принимаем за центр инверсии I , а другой — за точку P' , взаимную с P . Таким образом, вообще говоря, мы можем получить две инверсии. Если P и P' лежат по одну сторону от I , — инверсия гиперболическая (рис. 92, а), если по разные стороны от I , — эллиптическая (рис. 92, в). Исключением будет тот случай, когда прямая касается ок-

ружности, так как точку касания нельзя принять за центр инверсии, потому что тогда и окружность и прямая преобразуются в одну и ту же прямую.

В этом случае точку касания принимают за точку окружности инверсии: в этой точке сливаются P и P' . Тогда за центр инверсии принимают точку, диаметрально противоположную точке касания. Получается единственная гиперболическая инверсия.

Т₂. *Инверсия преобразует окружность, не проходящую через центр инверсии, в окружность, тоже не проходящую через центр инверсии.*

Возьмем окружность с центром O и обозначим через I центр данной инверсии (рис. 93), степень которой равна q . Примем сначала точку I за центр инверсии, преобразующей данную окружность в саму себя. Степень этой инверсии, очевидно, равна q' — степени точки I относительно данной окружности. Эта инверсия преобразует точку A данной окружности в точку A_1 той же окружности. Произведем теперь данную инверсию со степенью q . Она преобразует точку A_1 в точку A' . Но мы доказали, что последовательные инверсии $I_{q'}$ и I_q эквивалентны гомотетии с коэффициентом $k = \frac{q}{q'}$. Эта гомотетия преобразует данную окружность в окружность с центром O' . Итак, каждая точка A_1 первой окружности инверсией I_q преобразуется в точку A' второй окружности. Центр инверсии I совпадает с центром гомотетии двух окружностей — данной и новой.

Необходимо заметить, что центры O и O' не являются взаимными в инверсии I_q .

С₂. *Две окружности определяют инверсию, преобразующую их друг в друга.*

Пусть даны две окружности с центрами O и O' (рис. 93). Возьмем один из центров их гомотетии за центр инверсии I . Коэффициент гомотетии обозначим через k , степень точки I относительно окружности с центром O обозначим через q' . Тогда согласно выводам предыдущей теоремы степень искомой инверсии равна $q = kq'$. Таким образом, инверсия вполне определена. Вообще говоря, мы получим две инверсии, пользуясь двумя центрами гомотетии. Характер этих инверсий определяется знаками чисел k и q' . Исключением являются два случая: 1) Если окружности касаются, то одним из центров гомотетии служит точка ка-

сания. Но ее за центр инверсии принять нельзя, так как инверсия с этим центром преобразует окружности в две параллельные прямые. 2) Если окружности равны, то одна из инверсий вырождается в осевую симметрию.

7. 4. Рассмотрим теперь инварианты преобразования инверсии.

Т₁. При инверсии не изменяется величина угла между линиями.

Напомним, что за величину угла между двумя кривыми линиями принимается угол, образуемый касательными,

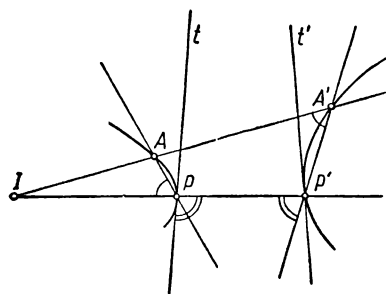


Рис. 94

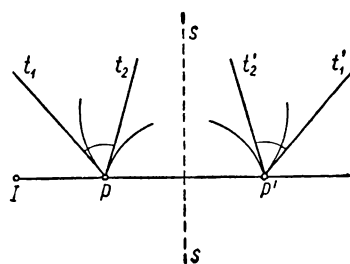


Рис. 95

проведенными к этим кривым в их общей точке. Возьмем некоторую кривую, которую инверсия с центром I преобразует в новую кривую (рис. 94). Пусть точки P и A на первой кривой преобразуются соответственно в точки P' и A' на второй кривой. По определению инверсии имеем $\angle IPA = \angle I A' P'$. Будем приближать точку A к точке P , тогда точка A' тоже будет приближаться к точке P' . Секущие PA и $P'A'$ будут приближаться к касательным к кривым в точках P и P' , оставаясь антипараллельными друг другу. Поэтому когда в пределе A сольется с P , а A' сольется с P' , то секущие перейдут в касательные t и t' , которые сохраняют антипараллельность. Итак, прямые t и t' образуют с прямой IP равные, но противоположно ориентированные углы, причем t и t' симметричны относительно оси симметрии точек P и P' .

Пусть теперь две кривые пересекаются в точке P (рис. 95). Инверсия с центром I преобразует их в две кривые, пересекающиеся в соответственной точке P' . Угол между касательными t_1 и t_2 в точке P равен углу между соответственными касательными t'_1 и t'_2 в точке P' , так как t_1

и t_1' , t_2 и t_2' симметричны относительно оси симметрии точек P и P' . Таким образом, инверсия не изменяет углов между линиями.

Как частный случай отсюда следует:

С₁. При инверсии сохраняется и касание и ортогональность линий.

На основании предыдущей теоремы получим: при касании угол между линиями равен нулю и остается нулевым после инверсии. При ортогональности этот угол равен прямому и остается прямым после инверсии.

С₂. Инверсия преобразует пучок и связку окружностей соответственно в пучок и связку того же типа.

Это совершенно очевидно для эллиптического и параболического пучков, так как в первом случае пучок преобразуется в множество окружностей, имеющих две общие точки, а во втором случае пучок преобразуется в множество окружностей, касающихся друг друга в одной общей точке. Если же данный пучок гиперболический, то построим ортогональный эллиптический пучок. Инверсия преобразует этот эллиптический пучок в эллиптический, а ортогональный — в ортогональный, т. е. в гиперболический. Аналогично проводится доказательство для связок.

Т₂. Две взаимные в инверсии фигуры преобразуются новой инверсией в две фигуры, также взаимные в инверсии.

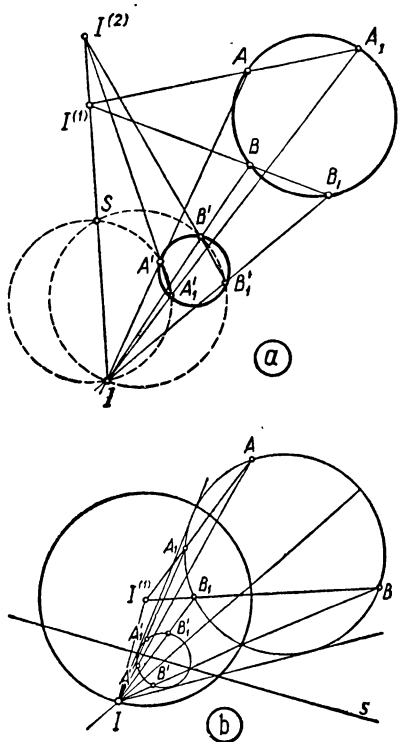


Рис. 96

Пусть первая инверсия $I^{(1)}$ преобразует точки A и B первой фигуры соответственно в точки A_1 и B_1 второй фигуры. Инверсия I преобразует A в A' , B — в B' , A_1 — в A'_1 и B_1 — в B'_1 . Покажем, что существует инверсия $I^{(2)}$, преобразующая A' в A'_1 и B' в B'_1 . Через точки A, A_1, B, B_1 проходит неподвижная окружность инверсии $I^{(1)}$. Эта окружность инверсией I преобразуется в окружность, проходящую через точки A', B', A'_1, B'_1 (рис. 96, а).

Эта же инверсия I преобразует прямые AA_1 и BB_1 в окружности, проходящие через точку I и пересекающиеся в точке S , взаимной с точкой $I^{(1)}$ и потому лежащей на прямой $II^{(1)}$. Полученные три окружности определяют связку с радикальными осями SI , $A'A'_1$ и $B'B'_1$, пересекающимися в радикальном центре $I^{(2)}$ на прямой $II^{(1)}$. Итак, $\overline{I^{(2)}A'} \cdot \overline{I^{(2)}A'_1} = \overline{I^{(2)}B'} \cdot \overline{I^{(2)}B'_1} = \text{const}$, т. е. $I^{(2)}$ есть центр новой инверсии.

С₃. *Гиперболическую инверсию всегда можно преобразовать в осевую симметрию.*

Если $I^{(1)}$ — гиперболическая инверсия, то центр инверсии I возьмем на окружности инверсии $I^{(1)}$. Тогда эта окружность преобразуется в прямую s ; окружность, проходящая через точки A, A_1, B, B_1 , преобразуется в окружность, ортогональную к этой прямой, прямые AA_1 и BB_1 преобразуются в окружности, тоже ортогональные к той же прямой. Поэтому пары A' и A'_1 , B' и B'_1 будут симметричны относительно этой прямой (рис. 96, в).

Т₃. *Ангармоническое отношение четырех точек не изменяется при инверсии.*

Напомним, что ангармоническим отношением четырех точек на окружности (см. упражнение 9 к предыдущей главе) называется ангармоническое отношение пучка прямых, проходящих через эти точки и любую точку окружности. Пусть окружность с точками A, B, C и D на ней преобразуется инверсией с центром I в прямую, на которой лежат соответственные точки A', B', C', D' (рис. 97). Так как при этой инверсии точка I лежит на окружности, то ангармоническое отношение $(ABCD)$ равно ангармоническому отношению пучка прямых с вершиной I . Ангармоническое же отношение прямых этого пучка равно ангармоническому отношению $(A'B'C'D')$ точек, полученных от

пересечения этого пучка прямой. Итак, $(ABCD) = (A'B'C'D')$.

Положим теперь, что окружность с точками A, B, C, D преобразуется инверсией I в окружность с соответственными точками A', B', C', D' (рис. 98). Возьмем точку S на первой окружности и соответственную точку S' на второй. Если через точки A, A', S, S' провести неподвижную окружность инверсии, то она с данными двумя окружностями определит связку. Радикальные оси AS и $A'S'$ пересекутся в точке A_1 — радикальном центре, через который проходит и радикальная ось двух данных

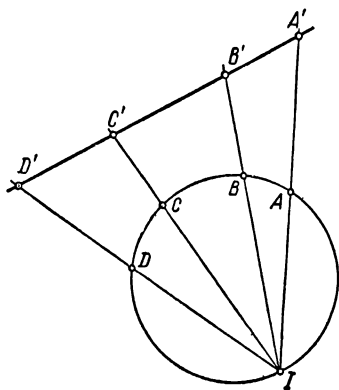


Рис. 97

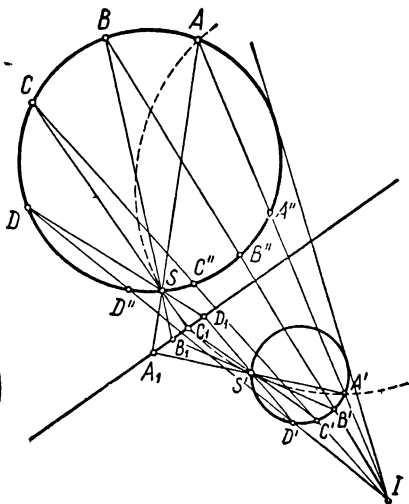


Рис. 98

окружностей. Точно так же докажем, что прямые SB и $S'B'$ пересекутся в точке B_1 на той же оси, а также определится точка C_1 — пересечение SC и $S'C'$ и точка D_1 — пересечение SD и $S'D'$. Итак, мы получили $(ABCD) = (A_1B_1C_1D_1)$ и $(A'B'C'D') = (A_1B_1C_1D_1)$ и, значит, $(ABCD) = (A'B'C'D')$.

Если прямые IA, IB, IC, ID пересекают первую окружность (рис. 98) соответственно в точках A'', B'', C'', D'' , то в силу гомотетичности окружностей $(A''B''C''D'') = (A'B'C'D')$, поэтому $(ABCD) = (A''B''C''D'')$. Это значит, что пучок четырех прямых из произвольной вершины I пересекает окружность так, что ангармонические

отношения двух полученных четверок точек равны между собой. Отсюда следует, что *ангармоническое отношение четырех точек сохраняется и на неподвижной окружности* (рис. 99).

Пусть, наконец, точки A, B, C, D и соответственные точки A_1, B_1, C_1, D_1 расположены на одной и той же прямой, проходящей через центр инверсии $I^{(1)}$. Новая инверсия с центром I преобразует эту прямую в неподвижную окружность в инверсии с центром $I^{(2)}$, причем четвер-

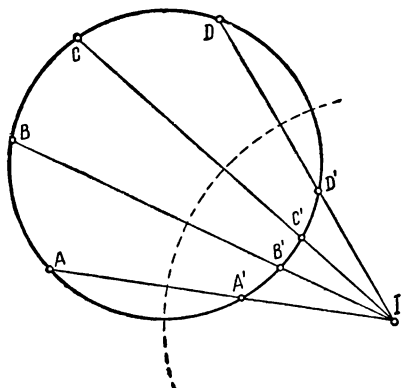


Рис. 99

ки точек преобразуются соответственно в четверки A', B', C', D' и A'_1, B'_1, C'_1, D'_1 , лежащие на той же окружности. Прямые $A'A_1, B'B_1, C'C_1, D'D_1$ проходят через точку $I^{(2)}$. Согласно только что доказанному $(A'B'C'D') = (A'_1 B'_1 C'_1 D'_1)$. Но $(A'B'C'D') = (ABCD)$, $(A'_1 B'_1 C'_1 D'_1) = (A_1 B_1 C_1 D_1)$, поэтому $(ABCD) = (A_1 B_1 C_1 D_1)$.

Теорема об инвариантности ангармонического отношения доказана вполне.

7. 5. И н в е р с и я в п р о с т р а н с т в е определяется совершенно так же, как и на плоскости: заданием центра инверсии I и пары точек P и P' при условии, что $P' \in IP$. Каждой точке A в пространстве приводится в соответствие точки A' так, чтобы выполнялось условие $IPA \cong IA'P'$. Из этого определения сразу получаем все

свойства инверсии в пространстве. Ввиду того что доказательства большинства предложений об инверсии в пространстве проводятся в полной аналогии с соответствующими предложениями для инверсии на плоскости, мы будем их в таких случаях опускать.

Т₁. Произведение расстояний от центра инверсии до двух соответственных точек есть величина постоянная, называемая с те п е н ь ю и н в е р с и и : $\overline{IA} \cdot \overline{IA'} = \overline{IP} \cdot \overline{IP'} = q$. Если $q > 0$, инверсия гиперболическая, если $q < 0$ — инверсия эллиптическая ($q = r^2$ при гиперболической, $q = -r^2$ при эллиптической инверсии).

Сфера с центром в точке I и радиусом r называется с ф е р о й и н в е р с и и .

Т₂. Неподвижными элементами инверсии в пространстве являются прямые и плоскости, окружности и сферы, проходящие через две взаимные в инверсии точки.

Прямые и плоскости в этом случае проходят через центр инверсии.

В гиперболической инверсии неподвижные окружности и сферы пересекают сферу инверсии ортогонально. Поэтому все неподвижные сферы гиперболической инверсии образуют гиперболическую сеть сфер.

В эллиптической инверсии неподвижные окружности и сферы пересекают сферу инверсии диаметрально и потому множество неподвижных сфер эллиптической инверсии образует эллиптическую сеть сфер.

Т₃. Две последовательные инверсии с одним и тем же центром эквивалентны одной гомотетии с тем же центром.

Коэффициент гомотетии по-прежнему выражается равенством $k = \frac{q'}{q}$.

Т₄. Симметрия относительно плоскости есть частный случай гиперболической инверсии, если плоскость симметрии рассматривать как сферу инверсии с несобственным центром.

Действительно, будем рассматривать гиперболическую инверсию, заданную несобственным центром I_∞ на прямой l и двумя соответственными точками P и P' на этой прямой. Прямая a , параллельная l , проходит через ту же несобственную точку I_∞ (рис. 100). Точка A на прямой l преобразуется в соответственную точку A' так, что удовлетворяется условие: $\angle I_\infty AP = \angle I_\infty P'A'$. Отсюда следует, что прямые AP и $A'P'$ антипараллельны и потому точки P и P' , A и A' симметричны относительно прямой s , про-

ходящей в плоскости, содержащей прямые l и a . Плоскость σ , проходящая через прямую s перпендикулярно к прямым l и a , есть плоскость симметрии пар P и P' , A и A' . Эту плоскость мы рассматриваем как сферу инверсии с несобственным центром I_∞ .

7. 6. Посмотрим теперь, как преобразуются пространственной инверсией прямые, окружности, плоскости и сферы.

T_1 . Пространственная инверсия преобразует прямую, не проходящую через центр инверсии, в окружность, проходящую через центр инверсии и лежащую в плоскости, определяемой этой прямой и центром.

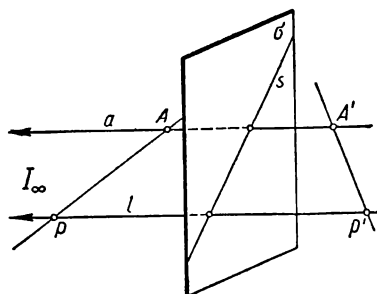


Рис. 100

T_1' (обратная). Окружность, проходящая через центр инверсии, преобразуется в прямую, не проходящую через центр и лежащую в плоскости окружности.

Для доказательства достаточно провести плоскость через прямую и центр инверсии и применить уже известные рассуждения. Так же поступают и для доказательства обратного предложения.

T_2 . Плоскость, не проходящая через центр инверсии, преобразуется в сферу, проходящую через центр инверсии.

T_2' (обратная). Сфера, проходящая через центр инверсии, преобразуется в плоскость, не проходящую через центр инверсии.

Для доказательства рассмотрим чертеж, изображающий преобразование прямой a в окружность с центром O , проходящую через центр инверсии I (рис. 101). Если будем вращать фигуру около оси IO , то прямая a опишет плоскость, перпендикулярную к оси вращения, а окружность опишет сферу с центром O , проходящую через центр инверсии I . Очевидно, всякая точка плоскости преобразуется в точку сферы и, обратно, всякая точка сферы преобразуется в точку плоскости.

S_1 . Данная сфера и данная плоскость всегда определяют инверсию, преобразующую их друг в друга.

Т₃. Сфера, не проходящая через центр инверсии, преобразуется в сферу, также не проходящую через центр инверсии.

Доказательство проведем так же, как и в предыдущей теореме: рассмотрим рисунок, изображающий преобразование окружности в окружность (рис. 102). Если будем вращать фигуру около линии центров окружностей, то обе окружности опишут сферы. При этом каждая точка одной сферы преобразуется в соответственную точку другой сферы.

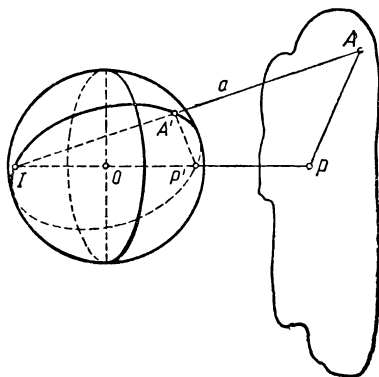


Рис. 101

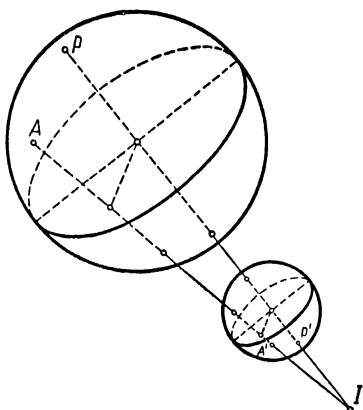


Рис. 102

Это можно сделать совершенно очевидным, проводя плоскость через данную точку и линию центров сфер, тогда мы вновь получим в сечении окружности, преобразующиеся этой инверсией друг в друга. Центр инверсии и здесь является центром гомотетии двух сфер.

С₂. Две сферы всегда определяют инверсию, которая преобразует их друг в друга.

За центр инверсии принимают один из центров гомотетии данных сфер.

С₃. Инверсия в пространстве преобразует окружность, не проходящую через центр инверсии, в окружность, тоже не проходящую через центр инверсии.

Для доказательства построим две произвольные сферы, проходящие через данную окружность. Инверсия преобразует эти сферы в две новые сферы, пересекающиеся по окружности, взаимной с данной в этой инверсии.

7. 7. И н в а р и а н т ы пространственной инверсии остаются теми же, что и при инверсии в плоскости.

Т₁. Пространственная инверсия не изменяет углов между линиями и поверхностями.

Так же как и для плоской инверсии, докажем сначала, что две касательные в соответственных точках P и P' (рис. 94) двух взаимных в инверсии линий лежат в одной и той же плоскости, образуя равные, но противоположно ориентированные углы. Но это значит, что эти касательные симметричны друг с другом относительно плоскости симметрии точек P и P' . Если положим теперь, что в точке P пересекаются две кривые, то взаимные с ними кривые пересекаются в точке P' , взаимной с P , и углы, образуемые касательными t_1 и t_2 в точке P и касательными t'_1 и t'_2 в точке P' , равны как взаимно симметричные относительно плоскости симметрии точек P и P' .

Под углом между поверхностями понимают угол между касательными плоскостями к этим поверхностям в их общей точке. Но угол между плоскостями определяется линейным углом между касательными, перпендикулярными к линии пересечения этих плоскостей. А так как углы между соответственными линиями сохраняются при инверсии, то сохраняется и угол между поверхностями.

С₁. При инверсии сохраняется и касание и ортогональность линий и поверхностей.

С₂. Инверсия преобразует пучок, связку и сеть сфер соответственно в пучок, связку и сеть сфер того же характера.

Т₂. Две взаимные в инверсии фигуры преобразуются новой инверсией в две фигуры, тоже взаимные в инверсии.

Доказательство этой теоремы проводится совершенно так же, как и для инверсии на плоскости, только вместо вспомогательных неподвижных окружностей здесь нужно пользоваться вспомогательными неподвижными сферами.

С₃. Гиперболическую инверсию в пространстве всегда можно преобразовать в симметрию относительно плоскости (отражение).

Для доказательства достаточно взять центр преобразующей инверсии на сфере данной инверсии. Тогда эта сфера преобразуется в плоскость, по отношению к которой все взаимные в инверсии точки станут симметричны между собой.

Т₃. Ангармоническое отношение четырех точек не изменяется при пространственной инверсии.

Если прямая и окружность или две окружности, на которых расположены четверки точек, преобразующиеся друг в друга инверсией, расположены в одной и той же плоскости, то это предложение уже было доказано раньше. Остается доказать тот случай, когда взаимные в инверсии окружности лежат в разных плоскостях.

Пусть окружность с точками A, B, C и D на ней преобразуется в окружность с соответственными точками A', B', C', D' , причем плоскости обеих окружностей пересекаются по прямой l . Возьмем точку S на первой окружности и соответственную точку S' — на второй (рис. 103). Точки

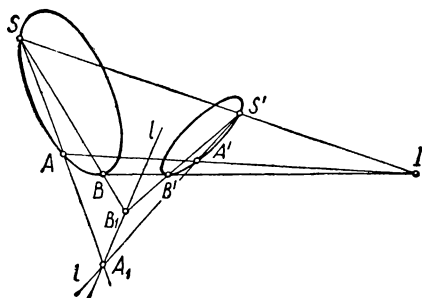


Рис. 103

S, A, S', A' лежат в одной и той же плоскости, проходящей через центр инверсии I . Прямые SA и $S'A'$ пересекаются в точке A_1 на прямой l в общей точке трех плоскостей. Таким же путем мы докажем, что прямые SB и $S'B'$ пересекаются в точке B_1 на прямой l , SC и $S'C'$ — в точке C_1 , SD и $S'D'$ — в точке D_1 на той же прямой. Итак, $(ABCD) = (A_1B_1C_1D_1)$ и $(A'B'C'D') = (A_1B_1C_1D_1)$, значит, $(ABCD) = (A'B'C'D')$ (точки C и D на рисунке не показаны).

Если бы оказалось, что окружности лежат в параллельных плоскостях, то тогда они были бы гомотетичны относительно центра инверсии I и ангармонические отношения были бы равны в силу гомотетии.

7. 8. Как мы уже знаем, инверсия, центр которой лежит на сфере, преобразует эту сферу в плоскость. При этом каждая точка сферы преобразуется в соответственную точку

плоскости (рис. 104). Все линии на сфере преобразуются в соответственные линии на плоскости: окружности, не проходящие через центр инверсии, преобразуются в окружности; окружности, проходящие через центр инверсии, преобразуются в прямые; сохраняется величина углов между линиями и числовое значение ангармонического отношения.

Ввиду того что каждая точка сферы лежит на одной и той же прямой с соответственной точкой плоскости и с центром инверсии, можно сказать, что точки плоскости

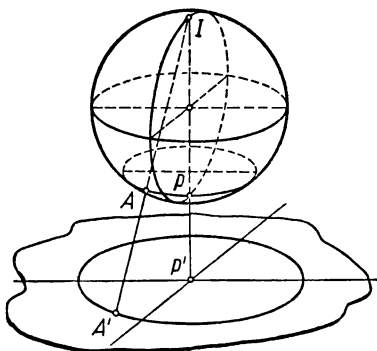


Рис. 104

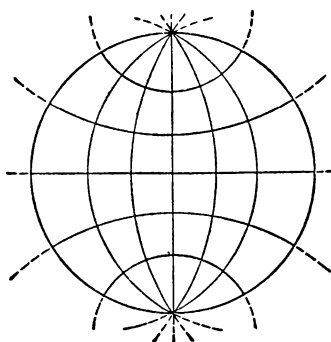


Рис. 105

получаются путем проекции точек сферы из центра инверсии I .

Д₁. Проекция, которая получается при инверсии, преобразующей сферу в плоскость, называется *стереографической*.

Благодаря тому, что стереографическая проекция дает возможность отображать фигуры, принадлежащие сфере, на плоскость, она широко используется при изготовлении карт звездного неба или карт земной поверхности. На рисунке 105 показана сетка меридианов и параллелей в стереографической проекции глобуса. При этом меридианы образуют эллиптический пучок, основными точками которого являются изображения полюсов. Ортогональный гиперболический пучок дает изображение параллелей. В этом случае центр инверсии (или, что все равно, центр проекции) находится в одной из точек экватора. Если же

за центр инверсии принять полюс, то сетка меридианов и параллелей примет вид, указанный на рисунке 106.

Стереографическая проекция удобна тем, что благодаря сохранению величины углов, фигуры, размеры которых малы по сравнению с величиной сферы, преобразуются в фигуры, похожие на данную.

Заметим, наконец, что инверсию можно производить и на поверхности сферы. Для этого мы данную сферу будем

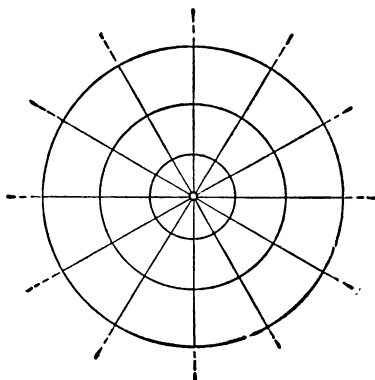


Рис. 106

рассматривать как неподвижную сферу некоторой пространственной инверсии. Взаимные в этой инверсии точки сферы мы будем считать взаимными точками в инверсии на сфере. Центр инверсии на сфере есть точка пересечения со сферой прямой, соединяющей центр пространственной инверсии с центром данной сферы. Окружностью инверсии на сфере служит окружность пересечения сферы пространственной инверсии с данной сферой. Так как фигуры, взаимные в инверсии на сфере, являются в то же время и фигурами, взаимными в пространственной инверсии, то, значит, все основные свойства инверсии сохраняются и для инверсии на сфере. В частности, сохраняется величина углов и числовое значение ангармонического отношения.

Если сферу преобразовать инверсией в плоскость, то инверсия на сфере преобразуется в инверсию на этой плоскости. Таким образом, инверсия на сфере отображается в инверсию на ее стереографической проекции.

Упражнения

1. Рассмотрим инверсию с центром I и степенью q . Пусть $I_q(A) \equiv A'$, $I_q(B) \equiv B'$. Доказать, что $A'B' = \frac{q \cdot \overline{IA}}{\overline{IA} \cdot \overline{IB}}$.

2. Доказать, что отношение расстояний каждой точки окружности гиперболической инверсии до двух взаимных в этой инверсии точек есть величина постоянная.

3. Доказать, что окружность гиперболической инверсии, преобразующей две данные окружности друг в друга, принадлежит пучку, определяемому этими окружностями.

4. При помощи инверсии преобразовать данный эллиптический пучок окружностей в пучок прямых. Во что при этом преобразуется ортогональный пучок?

5. Построить окружность, которая проходила бы через данную точку и касалась двух данных окружностей.

6. При помощи инверсии, преобразовать две данные окружности, не имеющие общих точек, в две концентрические окружности.

7. Доказать, что три окружности гиперболических инверсий, попарно преобразующих три данные окружности друг в друга, образуют пучок.

8. Найти инверсию, преобразующую три данные окружности в три равные окружности.

9. Использовать результаты предыдущей задачи к решению задачи Аполлония: построить окружность, касательную к трем данным окружностям.

10. Доказать, что окружность, пересекающая две данные окружности под одним и тем же углом, есть неподвижная окружность в инверсии, преобразующей данные окружности друг в друга.

11. Доказать, что инверсии, преобразующие друг в друга две пересекающиеся окружности, являются гиперболическими, причем окружности этих инверсий взаимно ортогональны.

12. Найти точку, взаимную с данной точкой в эллиптической инверсии, заданной центром и окружностью инверсии. Построение произвести, не прибегая к предварительному построению гиперболической инверсии.

13. Найти инверсию, преобразующую две данные сферы в две равные сферы.

14. На сфере дана окружность. Доказать, что все прямые, проходящие через данную точку, не принадлежащую сфере, и через точки данной окружности, при пересечении со сферой дают другую окружность.

15. Окружность и сфера называются взаимно ортогональными, если касательная прямая к окружности и касательная плоскость к сфере в точке пересечения сферы и окружности перпендикулярны между собой. Доказать, что всякая окружность, проходящая через две взаимные в гиперболической инверсии точки, ортогональна к сфере инверсии.

16. Доказать, что существует единственная сфера, ортогональная к двум данным окружностям в пространстве.

17. На поверхности сферы даны две окружности. Доказать, что геометрическим местом точек на сфере, имеющих одинаковую сте-

пень относительно двух сфер, проходящих через данные окружности и ортогональных к сфере, есть окружность большого круга, называемая радикальным кругом этих окружностей.

18. Множество окружностей сферы, имеющих один и тот же радикальный круг, называется пучком окружностей на сфере. Доказать, что пучки на сфере аналогичны пучкам на плоскости. Что из себя представляет множество окружностей, ортогональных ко всем окружностям сферического пучка окружностей?

19. Как преобразуются различные виды пучков окружностей на сфере при помощи стереографической проекции?

20. Доказать, что радикальные круги трех окружностей на сфере имеют один и тот же диаметр. Опираясь на это свойство, дать определение и указать виды связок окружностей на сфере.

Глава 8

ОСУЩЕСТВЛЕНИЕ ЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ В ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СЕТИ СФЕР

8. 1. Рассмотренные нами свойства и преобразования евклидова пространства позволяют взглянуть на это пространство с совершенно новой точки зрения.

Мы увидим, что можно построить систему объектов, совершенно отличных от привычных образов элементарной геометрии, но в то же время подчиняющихся всем законам евклидова пространства.

Будем называть «точками» обычные точки трехмерного пространства, за исключением одной точки S , которую мы будем считать не принадлежащей к нашему новому пространству.

«Прямыми» мы будем называть все окружности, проходящие через точку S , включая сюда и окружности с несобственным центром, т. е. прямые (в прежнем смысле этого слова), проходящие через точку S .

«Плоскостями» мы будем называть все сферы, проходящие через точку S , включая сюда и сферы с несобственным центром, т. е. плоскости (в прежнем значении этого слова), проходящие через точку S .

Другими словами, наше новое «пространство» представляет собой сферическую сеть параболического типа с радикальным центром в точке S , исключенной из нашего «пространства».

Посмотрим, как осуществляются в этом пространстве аксиомы евклидовой геометрии. При этом мы будем рассматривать эти предложения параллельно: слева — в тер-

минах «новой» геометрии, справа — в привычных нам понятиях элементарной геометрии. Нумерацию предложений мы сохраним такую же, какой пользовались в предыдущем изложении.

A⁽¹⁾₁. Существует единственная прямая, проходящая через две данные точки.

Существует единственная окружность, проходящая через две точки нашего пространства и проходящая еще и через точку S, которая нашему пространству не принадлежит.

A⁽¹⁾₂. Каждой прямой принадлежат по крайней мере две точки. Существует по крайней мере три точки, не лежащие на одной и той же прямой.

На каждой окружности существует по крайней мере две точки. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной и той же окружности связи.

A⁽¹⁾₃. Существует единственная плоскость, проходящая через три точки, не лежащие на одной и той же прямой. Каждой плоскости принадлежит по крайней мере одна точка.

Существует единственная сфера, проходящая через три точки, не принадлежащие одной и той же окружности связи и проходящая еще и через точку S. Каждой сфере принадлежит по крайней мере одна точка.

A⁽¹⁾₄. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и все точки той же прямой принадлежат плоскости.

Если две точки окружности связи принадлежат сфере той же связи, то и вся окружность принадлежит сфере, так как она проходит и через точку S на сфере.

A⁽¹⁾₅. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют по крайней мере и еще одну общую точку.

Если две сферы связи имеют одну общую точку, то они имеют по крайней мере и еще одну общую точку.

A⁽¹⁾₆. Существуют по крайней мере четыре точки, не принадлежащие одной и той же плоскости.

Существуют по крайней мере четыре точки, не принадлежащие одной и той же сфере данной связи, так как всегда можно взять три точки на сфере и еще одну вне этой сферы.

Вполне естественно, что остаются в силе все следствия из этих аксиом:

C₁. Две различные прямые могут иметь не более одной общей точки.

Две различные окружности связи могут иметь не более одной общей точки, так как вторая общая точка S исключена из нашего пространства.

С₂. Две различные плоскости, имеющие общую точку, имеют одну и только одну общую прямую.

Две сферы связки, имеющие общую точку, имеют одну и только одну общую окружность связки.

С₃. Существует единственная плоскость, проходящая через данную прямую и не принадлежащую ей точке.

Существует единственная сфера, проходящая через данную окружность и не принадлежащую ей точке.

С₄. Существует единственная плоскость, проходящая через две пересекающиеся прямые.

Существует единственная сфера, проходящая через две пересекающиеся окружности.

Мы видим, что все аксиомы сочетания и их непосредственные следствия оказались справедливыми и в построенном нами «пространстве».

8. 2. Дальнейшее изучение свойств нового пространства мы будем производить на плоскости, так как все планиметрические предложения легко проиллюстрировать наглядными чертежами. Итак, возьмем одну из «плоскостей» нашего пространства, т. е. одну из сфер нашей связки, проходящую через радикальный центр S (рис. 107). «Прямыми» в нашей планиметрии будут все окружности этой сферы, проходящие через точку S . Наконец, «точками» мы будем считать все точки сферы, за исключением точки S . Итак, множество «прямых» нашей «плоскости» есть множество окружностей параболической связки на сфере с радикальным центром S .

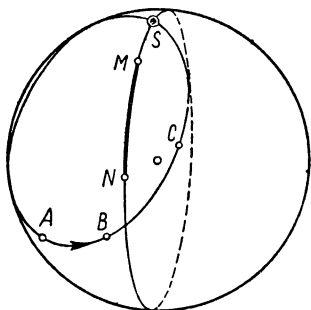


Рис. 107

Посмотрим теперь, как в нашей планиметрии осуществляются аксиомы порядка.

$A_1^{(2)}$. Любую из двух различных точек прямой можно назвать предшествующей, тогда вторая точка будет последующей.

Совершенно очевидно, что точно такое же условие можно принять и для любых двух точек окружности.

$A^{(2)}_2$. Если $A \rightarrow B$, $B \rightarrow C$,
то $A \rightarrow C$. Точка B лежит
между A и C .

Если A , B и C — точки на
окружности связки (рис. 107),
то при условии $A \rightarrow B \rightarrow C$ от
 A к C непрерывным дви-
жением можно пройти
только через точку B , так как
двигаться обратным движе-
нием от A к C нельзя: путь
преграждает точка S , кото-
рая не принадлежит сфере.

$A^{(2)}_3$. Между каждыми дву-
мя точками прямой существует
и еще точка той же прямой.

Для двух точек окружности это
положение тоже очевидно.

Отсюда следует вывод о бесконечном числе точек, ле-
жащих между двумя точками прямой, и связанное с этим
определение отрезка. Две точки, данные на окружности
связки, определяют две дуги, но из этих дуг «отрезком»
будет только та, которая не содержит точки S . Например,
на рисунке 107 выделен отрезок MN .

$A^{(2)}_4$. Для каждой точки
прямой существует как пред-
шествующая, так и последующая
точка.

Эта аксиома совершенно
очевидна для всякой точки ок-
ружности связки.

На основании этой аксиомы дается определение луча
или полупрямой. Для окружности связки таким лучом бу-
дет любая из дуг, идущая от данной точки окружности к
радикальному центру S .

Последняя аксиома порядка $A_6^{(2)}$ определяет располо-
жение точек и прямых на плоскости: каждая прямая разде-
ляет плоскость на две полуплоскости. Каждые две точки
одной и той же полуплоскости определяют отрезок, не
пересекающий прямую. Каждый отрезок, соединяющий
точки разных полуплоскостей, определяет отрезок, пере-
секающий прямую. Это также вполне очевидно для ок-
ружности связки: окружность l связки делит сферу
связки на две части.

Точки, принадлежащие одной и той же части (точки A
и B на рис. 108), определяют дугу, не пересекающую дан-
ную окружность; точки, принадлежащие различным ча-
стям (P и Q на рис. 108), определяют дугу, пересекающую
окружность.

На основании этих предложений доказываются след-
ствия о существовании бесконечного множества точек и
прямых на плоскости.

8. 3. Следующей группой аксиом дается определение геометрического равенства — конгруэнтности. Для того чтобы сделать изложение этого вопроса еще более наглядным и для более легкого выполнения чертежей, воспользуемся стереографической проекцией и спроектируем нашу сферу на плоскость, приняв за центр проекции какую-нибудь точку на сфере, отличную от точки S . Тогда параболическая связка окружностей на сфере преобразуется в параболическую связку окружностей на плоскости. Эти окружности мы по-прежнему будем называть «прямыми» в нашей планиметрии. Заметим, что часть окружностей связки на сфере, именно тех, которые образуют пучок с основными точками в точке S и в центре стереографической проекции, преобразуется в пучок прямых, проходящих через точку S . Эти прямые мы будем также считать прямыми нашей планиметрии и так как они образуют пучок, то мы должны допустить, что все они имеют одну общую несобственную точку, соответствующую центру стереографической проекции. Нетрудно убедиться в том, что точно такую же параболическую связку окружностей с радикальным центром S мы получили бы, приняв за плоскость одну из плоскостей сферической сети, проходящую через радикальный центр. Перейдем теперь к определению конгруэнтности на нашей плоскости. В предыдущем изложении мы положили в основу определения конгруэнтности преобразование осевой симметрии.

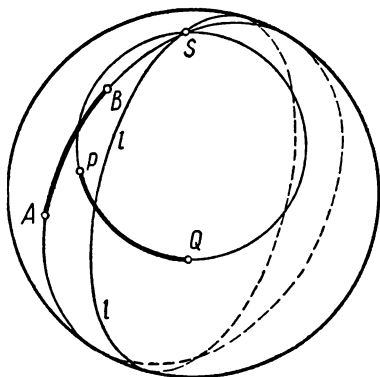


Рис. 108

В нашей планиметрии мы будем называть «осевой симметрией» гиперболическую инверсию (которую в дальнейшем будем называть просто «инверсией») относительно любой «прямой» нашей плоскости.

Проверим, как при этом осуществляются аксиомы третьей группы. По-прежнему мы слева будем писать формулировку аксиомы, а справа ее перевод в привычных терминах нашей прежней геометрии.

Проверим, как при этом осуществляются аксиомы третьей группы. По-прежнему мы слева будем писать формулировку аксиомы, а справа ее перевод в привычных терминах нашей прежней геометрии.

$A^{(2)}_1$. Каждая прямая в плоскости определяет преобразование, при котором точки одной полуплоскости взаимно отображаются на точки другой полуплоскости, а точки самой прямой остаются неподвижными.

$A^{(2)}_2$. При этом преобразовании точки, лежащие на одной и той же прямой, преобразуются в точки, также лежащие на одной и той же прямой, причем сохраняется порядок точек.

$A^{(2)}_3$. Две различные точки плоскости определяют единственную прямую этой плоскости, относительно которой они преобразуются друг в друга.

Каждая окружность параболической связки определяет инверсию, при которой внутренние и внешние точки окружности взаимно преобразуются друг в друга, а точки самой окружности остаются неподвижными.

При инверсии относительно любой окружности связки все точки любой другой окружности связки преобразуются в точки, лежащие также на одной и той же окружности связки. Порядок точек при этом сохраняется.

Две различные точки на сфере параболической связки определяют единственную окружность связки, относительно которой они преобразуются друг в друга.

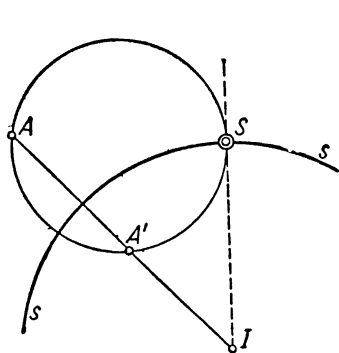


Рис. 109

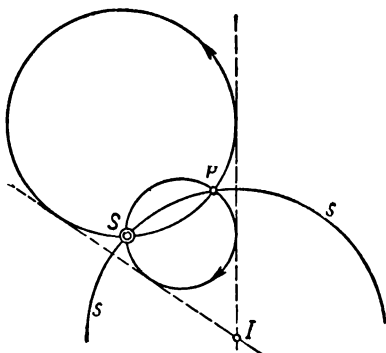


Рис. 110

На рисунке 109 точка S — радикальный центр связки A и A' — данные точки. Проведем окружность через точки A , A' и S .

Это будет неподвижная окружность искомой инверсии. Касательная в точке S к этой окружности пересекается с прямой AA' в точке I — центре инверсии. Окружность с центром I и радиусом \overline{IS} и есть искомая ось симметрии.

$A^{(3)}_4$. Два луча с общей вершиной определяют единственную прямую, относительно которой они преобразуются друг в друга.

Две пересекающиеся направленные окружности связки определяют единственную окружность связки, относительно которой они преобразуются друг в друга.

Пусть две направленные окружности связки пересекаются в точке P (рис. 110). Окружностью инверсии, преобразующей их друг в друга, служит окружность, проходящая через точки P и S (т. е. одна из окружностей связки), с центром в одном из двух центров гомотетии данных окружностей. Этот центр выбирается так, чтобы соответствующие лучи преобразовались друг в друга (на рисунке эти лучи помечены стрелкой).

$A^{(3)}_5$. Две взаимно симметричные фигуры новой симметрией преобразуются в две фигуры, симметричные относительно той прямой, в которую преобразуется ось первоначальной симметрии.

Две фигуры, взаимные в инверсии, преобразуются новой инверсией в две фигуры, взаимные в инверсии относительно той окружности, в которую преобразовалась окружность первоначальной инверсии.

Это предложение было нами доказано в предыдущей главе (п. 7. 4. T_2).

Итак, мы видим, что все аксиомы, определяющие осевую симметрию, остаются также справедливыми и в нашей новой планиметрии. А отсюда следует, что и все выводы из этих аксиом будут также правильными. Например, понятие перпендикулярности прямых соответствует ортогональности окружностей связки.

На рисунке 109 «прямая» AA' перпендикулярна к «оси симметрии» s , причем эта перпендикулярность является свойством взаимным. Нетрудно также убедиться в справедливости теоремы о единственности перпендикуляра, проведенного через данную точку к данной прямой. Действительно, если дана окружность связки и какая-нибудь точка A , то мы найдем точку A' , взаимную с A относительно этой окружности в инверсии. Тогда искомым «перпендикуляром» будет ортогональная окружность, проходящая через точки A, A', S .

8.4. Конгруэнтными фигурами мы по-прежнему назовем фигуры, получаемые друг из друга при помощи ряда «осевых симметрий». Если число симметрий четное, то фигуры называются **с о б с т в е н н о к о н г р у э н т н ы м и**, ес-

ли нечетное — несобственно конгруэнтными. Четное число симметрий осуществляет собственное движение в плоскости, нечетное — несобственное. Несобственное движение изменяет ориентировку фигуры, собственное — ее сохраняет.

На рисунке 111 показаны два взаимно симметричных треугольника, причем мы можем убедиться в том, что ориентировки их противоположны друг другу.

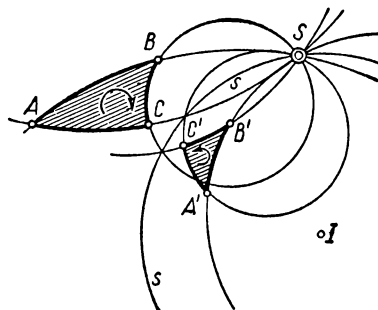


Рис. 111

Нас не должно смущать то обстоятельство, что треугольники ABC и $A'B'C'$ не являются конгруэнтными с точки зрения нашей обычной геометрии. Не будем забывать того, что теперь мы находимся в совершенно новом пространстве и производим построения по новым правилам, хотя логическая основа наших построений остается прежней.

Перемещая «отрезок» с одной «прямой» на другую, мы можем установить справедливость последней аксиомы из третьей группы аксиом:

А⁽³⁾₆. Преобразуя движением данный отрезок в новый отрезок, расположенный в данном направлении от данной точки на данной прямой, мы всегда получим один и тот же отрезок.

Если дана дуга AB на одной из окружностей связки и точка M на любой из этих окружностей, то посредством ряда инверсий относительно окружностей связки можно преобразовать дугу AB в дугу MN на второй окружности, причем положение точки N однозначно определяется дугой AB и точкой M и не зависит от порядка и числа инверсий.

На рисунке 112 показано преобразование дуги AB в дугу MN при помощи двух инверсий. Чтобы доказать это предложение для инверсий, нужно принять во внимание, что все окружности инверсий проходят через одну и ту же точку S . Поэтому, произведя вспомогательную инверсию с центром в точке S , мы преобразуем дуги AB и MN в прямолинейные отрезки, а все инверсии — в осевые симметрии.

рии. Но тогда справедливость предложения для инверсий будет простым следствием справедливости аксиомы $A_6^{(3)}$.

Из того, что вся третья группа аксиом приложима в нашей новой планиметрии, вытекает, что будут справедливы и все предложения, основанные на этих аксиомах, в частности теорема о том, что «ось симметрии» есть геометрическое место точек, равноудаленных от двух взаимно симметричных точек.

Так как инверсия не изменяет углов между линиями, мы заключаем также, что остаются в силе все предложения

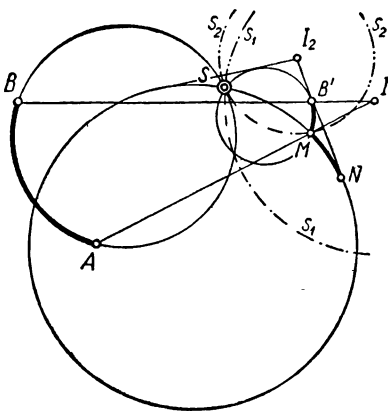


Рис. 112

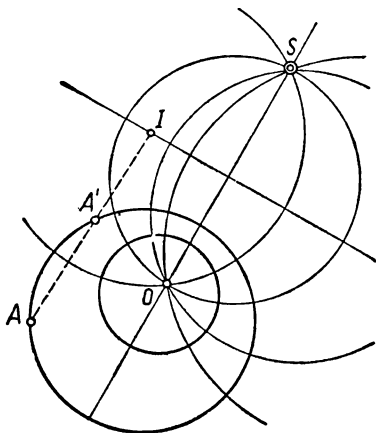


Рис. 113

о равенстве углов, о соотношениях между сторонами и углами треугольника, о равенстве треугольников.

Окружность мы определили как геометрическое место точек, симметричных с данной точкой относительно всех прямых данного пучка. Из этого определения следует, что в нашей планиметрии окружностью будет ортогональная окружность эллиптического пучка, образуемого окружностями связки. На рисунке 113 изображены две концентрические окружности с общим центром O . Действительно, любая точка A на одной из полученных окружностей при инверсии относительно любой окружности пучка преобразуется в точку той же окружности.

8. 5. Из всего предыдущего изложения мы могли убедиться, что изучаемые нами «пространство» и «плоскость»

в отношении аксиом сочетания, порядка и конгруэнтности оказались совершенно тождественными с хорошо известными нам пространством и плоскостью геометрии Евклида. Остается устранить одно существенное различие, которое заключается в том, что евклидову плоскость и евклидову прямую мы представляем себе как нечто безграничное, тогда как сфера, которую мы принимаем за плоскость, и те окружности связки, которые мы принимаем за прямые, являются ограниченными и легко обозримыми. Однако это различие является только кажущимся. Новая «плоскость»

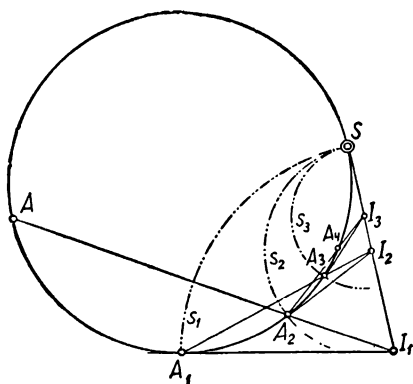


Рис. 114

и новая «прямая» ограничены только с точки зрения нашей прежней геометрии. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим, в чем состоит смысл слов «бесконечная плоскость» и «бесконечная прямая».

Прежде всего совершенно очевидно, что бесконечность плоскости обусловлена бесконечностью каждой прямой, проходящей по этой плоскости. Бесконечность же прямой заключается в том, что если на этой прямой дан отрезок $\overline{AA_1}$, то, строя последовательно ряд равных отрезков $\overline{AA_1} = \overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \dots = \overline{A_{n-1}A_n} = \dots$, мы никогда не дойдем до конца прямой.

Рассмотрим такое же последовательное отложение ряда равных отрезков на «прямой» нового пространства. На рисунке 114 дана «прямая», т. е. окружность параболической связки с радикальным центром S. Для того чтобы после-

довательно откладывать данный отрезок $\overline{AA_1}$, проведем через точку A_1 «перпендикуляр», т. е. ортогональную окружность связки, и найдем точку A_2 , симметричную (т. е. взаимную в инверсии) с точкой A , и получим отрезок $\overline{A_1A_2} = \overline{AA_1}$. Через точку A_2 проведем новый «перпендикуляр» и получим новый отрезок $\overline{A_2A_3} = \overline{A_1A_2}$. Продолжая неограниченно этот процесс, мы убедимся, что мы никогда не сможем его закончить.

Действительно, рассмотрим точки A, A_1, A_2 и S (рис. 114). При изучении инверсии мы установили, что ангармоническое отношение четырех точек не меняется при инверсии. Инверсия с центром I_1 преобразует точки S, A_1, A, A_2 соответственно в точки S, A_1, A_2, A . Поэтому получим равенство $(SA_1AA_2) = (SA_1A_2A)$. Полагая $(SA_1A_2A) = k$, получим $(SA_1AA_2) = \frac{1}{k}$, так как

$$(SA_1AA_2) = \frac{\overline{AS}}{\overline{AA_1}} : \frac{\overline{A_2S}}{\overline{A_2A_1}}, \quad (SA_1A_2A) = \frac{\overline{A_2S}}{\overline{A_2A_1}} : \frac{\overline{AS}}{\overline{AA_1}}.$$

Но если $k = \frac{1}{k}$, то $k^2 = 1$, $k = \pm 1$. Однако из равенства $k = 1$ мы получили бы, что $(SA_1A) = (SA_1A_2)$, т. е. что $A \equiv A_2$, чего быть не может, так как точка A не принадлежит окружности инверсии и потому преобразуется в новую точку. Поэтому $k = -1$ и, значит, пара AA_2 гармонически разделяет пару SA_1 .

Аналогично докажем, что пара A_1A_3 гармонически разделяет пару SA_2 , пара A_2A_4 гармонически разделяет пару SA_3 , вообще пара $A_{n-2}A_n$ гармонически разделяет пару SA_{n-1} . Другими словами, последовательное отложение равных отрезков никогда не закончится и, значит, прямая нашего нового пространства, а вместе с тем и его плоскости бесконечны.

8. 6. Одновременно можно показать, что, откладывая последовательно ряд равных отрезков, мы можем достигнуть любой точки прямой. Чтобы доказать это, рассмотрим сначала частный случай, когда «прямая» нашего пространства тождественна с обычной прямой (рис. 115). Пусть пара AA_2 гармонически разделяет пару A_1S , пара A_1A_3 гармонически разделяет пару A_2S , пара A_2A_4 — пару A_3S

и т. д. С точки зрения нашей новой планиметрии мы будем иметь:

$$\overline{AA_1} = \overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \overline{A_3A_4} = \dots = \overline{A_{n-1}A_n} = \dots$$

Оценим теперь расстояния \overline{SA} , $\overline{SA_1}$, $\overline{SA_2}$, ..., $\overline{SA_n}$, ... в единицах обычной планиметрии. Положим:

$\overline{SA} = a$, $\overline{SA_1} = k_1a$, $\overline{SA_2} = k_2a$, $\overline{SA_3} = k_3a$, ..., $\overline{SA_n} = k_na$, ..., где $k_1 < 1$. В силу условия гармонического расположения каждой последовательной четверки точек получим $(A_2ASA_1) = -1$ или

$$\frac{\overline{SA_2}}{\overline{SA}} = -\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1A}}, \text{ т. е. } \frac{\overline{SA_2}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{A_2A_1}}{\overline{A_1A}}.$$

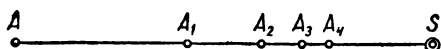


Рис. 115

Преобразуя числитель и знаменатель второй дроби, получим:

$$\frac{\overline{SA_2}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{A_2S} + \overline{SA_1}}{\overline{A_1S} + \overline{SA}}, \text{ откуда находим } \frac{k_2a}{a} = \frac{-k_2a + k_1a}{-ka + a}, \text{ т. е.}$$

$$k_2 = \frac{k_1 - k_2}{1 - k_1}; k_2 - k_1k_2 = k_1 - k_2; k_2(2 - k_1) = k_1 \text{ и, наконец,}$$

$$k_2 = k_1 \frac{1}{2 - k_1}. \text{ Аналогичным путем получим:}$$

$$k_3 = k_2 \frac{1}{2 - k_2} = k_1 \frac{1}{2 - k_1} \cdot \frac{1}{2 - k_2}. \text{ Далее,}$$

$$k_4 = \frac{1}{2 - k_1} \cdot \frac{1}{2 - k_2} \cdot \frac{1}{2 - k_3}.$$

И вообще, $k_n = k_1 \frac{1}{2 - k_1} \cdot \frac{1}{2 - k_2} \dots \frac{1}{2 - k_{n-1}}$. Так как $k_1 < 1$,

то $\frac{1}{2 - k_1} < 1$ и, значит, $k_2 < k_1$, далее, $k_2 < k_3$, $k_3 < k_4$ и т. д.

Окончательно мы получим:

$$\overline{SA_n} = k_na = a \cdot k_1 \frac{1}{2 - k_1} \cdot \frac{1}{2 - k_2} \cdot \frac{1}{2 - k_3} \dots \frac{1}{2 - k_{n-1}}.$$

Каждая из дробей в этом произведении меньше единицы и так как числа k_i уменьшаются, то уменьшается и каждая

из дробей. Поэтому при неограниченном увеличении n отрезок SA_n может стать меньше любого данного отрезка. А это значит, что если от точки A последовательно откладывать ряд «равных» отрезков, то конечным числом шагов можно достичь любой точки «прямой». Другими словами, в нашей планиметрии имеет место аксиома $A_1^{(4)}$, т. е. аксиома Архимеда.

Что касается аксиомы $A_2^{(4)}$, т. е. аксиомы Кантора, то выше мы уже указали, что она справедлива и для дуг окружности. Итак, в нашей новой планиметрии приложима вся система аксиом абсолютной геометрии. Отсюда следует, что и все остальные предложения абсолютной геометрии будут иметь место в нашей плоскости.

В качестве примера мы приведем построение окружности, вписанной в данный треугольник. На рисунке 116

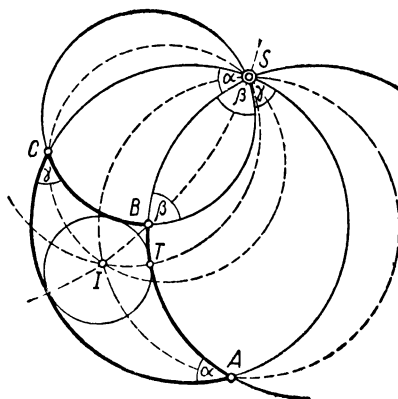


Рис. 116

дан «треугольник» ABC , проведены три «биссектрисы» его внутренних углов, пересекшиеся в точке I — «центре» вписанной окружности. Чтобы определить эту окружность, проводим из точки I «перпендикуляр» IT к стороне, чем определяется «радиус» искомой окружности.

8. 7. Нам остается выяснить, имеет ли место в нашей плоскости параллельность и каковы будут свойства параллельных. Припоминая определение параллельных как прямых, которые принадлежат одной и той же плоскости и не

пересекаются, мы увидим, что этому определению вполне соответствуют окружности связки, касающиеся друг друга в точке S (рис. 117). Действительно, эти «прямые» принадлежат одной и той же плоскости и не имеют ни одной общей точки, так как точка S нашей плоскости не принадлежит. Но наиболее важным фактом является то, что в нашей планиметрии имеет место аксиома параллельности в формулировке Плейфера: *существует одна и толь-*

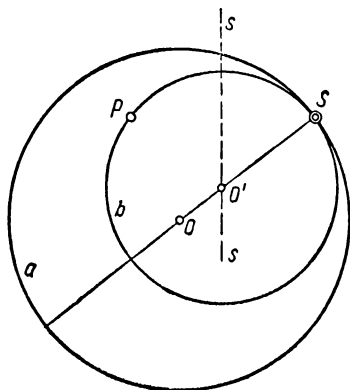


Рис. 117

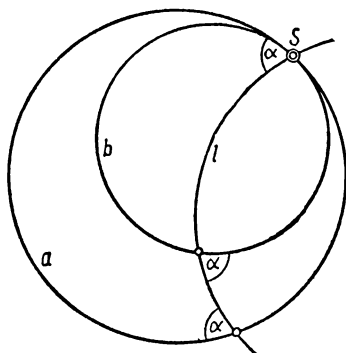


Рис. 118

ко одна прямая, проходящая через данную точку и параллельная данной прямой.

Действительно, пусть a — данная «прямая» (рис. 117), P — данная точка. Центр O' единственной окружности, проходящей через точку P и касающейся окружности a в точке S , находится в пересечении прямой OS и оси симметрии точек S и P .

Итак, мы видим, что вся система аксиом геометрии Евклида целиком и полностью сохраняется в нашем «пространстве». А это значит, что и все следствия из этих аксиом, т. е. все предложения геометрии Евклида, будут истинными для пространственных форм в новой геометрии.

Например, на рисунке 118 мы видим равенство внутренних накрест лежащих углов, которые получились от пересечения двух параллельных прямых a и b секущей l . Это равенство становится совершенно очевидным, если при-

нять во внимание, что каждый из накрест лежащих углов равен одному и тому же углу α при точке S .

В непосредственной связи с аксиомой параллельности стоит теорема о сумме внутренних углов треугольника. На рисунке 116 углы α , β и γ в треугольнике ABC равны углам, обозначенным теми же буквами при вершине S . Но эти углы дают в сумме развернутый угол. Итак, $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

На рисунке 119 показан параллелограмм $ABCD$ с диагоналями AC и BD и центром O . На рисунке 120 изображены

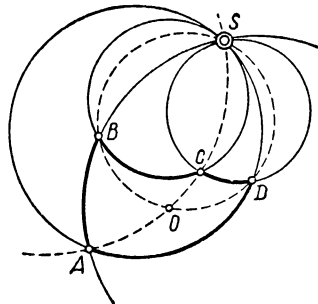


Рис. 119

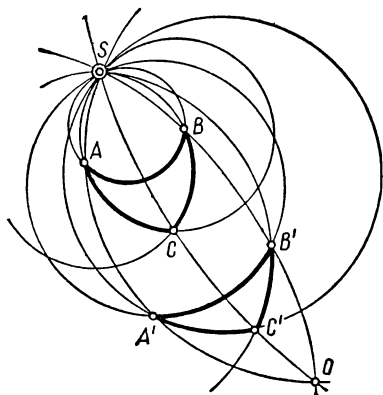


Рис. 120

два «гомотетичных» треугольника ABC и $A'B'C'$ с центром гомотетии в точке O .

8.8. Подводя итог изложенному в этой главе, мы приходим к следующему выводу. Построенная нами геометрическая система в логическом отношении решительно ничем не отличается от изучаемой нами в школе привычной геометрии Евклида. И если бы мы не пользовались чертежами и опирались в своих рассуждениях только на одни аксиомы, то мы совершенно не знали бы, о каких собственно конкретных предметах идет речь, так как и та и другая реализация пространственных образов в одинаковой мере пригодна для иллюстрации всех геометрических предложений.

D₁. Если между двумя совокупностями предметов можно установить взаимно однозначное соответствие и если

при этом каждому соотношению между предметами первой совокупности взаимно соответствует аналогичное соотношение между предметами второй совокупности, то такие две совокупности называются изоморфными относительно данной системы соотношений.

В нашем случае совокупность точек, прямых и плоскостей обычной геометрии изоморфна с совокупностью точек, окружностей и сфер параболической сети относительно системы аксиом сочетания, порядка, симметрии, непрерывности и параллельности. С логической точки зрения эти совокупности неразличимы и каждая из них представляет собой только одну из возможных реализаций (или интерпретаций) евклидова пространства.

Понятие изоморфизма играет исключительно большую роль в науке, да и не только в науке, но и в нашем повседневном жизненном опыте. Положим, например, что кто-нибудь въезжает в новую квартиру и ставит перед собой задачу возможно рациональнее распределить на данной площади имеющуюся у него мебель. Для этого лучше всего поступить следующим образом: взять точный план квартиры и в том же масштабе вырезать из картона фигуры, соответствующие по величине и форме проекциям мебели на площадь пола. Передвигать по плану кусочки картона легче и удобнее, чем передвигать тяжелую и громоздкую мебель и, конечно, этим путем гораздо скорее можно найти наиболее подходящее решение вопроса. Очевидно, мы построили совокупность вещей, изоморфную с совокупностью мебели. «Аксиомами» для нас служили известные условия расстановки: нельзя ставить один предмет на другой, нельзя загораживать двери и окна и т. д.

Другим примером изоморфизма может послужить графическое изображение функциональной зависимости. В этом случае мы устанавливаем взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и парами числовых значений аргумента и функции. В результате мы получаем кривую, внешний вид которой дает нам наглядное представление об изменении функции. В аналитической геометрии мы имеем обратный процесс — здесь пространственные объекты (кривые, поверхности и т. д.) изоморфно отображаются на аналитические выражения и изучение геометрических форм приводится к изучению изоморфных аналитических объектов — уравнений и тождеств.

В заключение нужно сказать, что установленный нами изоморфизм между параболической сетью или связкой и объектами привычной геометрии можно сделать совершенно очевидным. Для этого достаточно принять радикальный центр S за центр инверсии. Тогда все сферы связки преобразуются в плоскости, окружности связки — в прямые, инверсия относительно сфер и окружностей связки перейдет в обычную симметрию и т. д., словом — наше «пространство» преобразуется в обычное пространство и наша «плоскость» — в обычную плоскость. На рисунке 121 приведен пример, где этим путем «параллелограмм» в

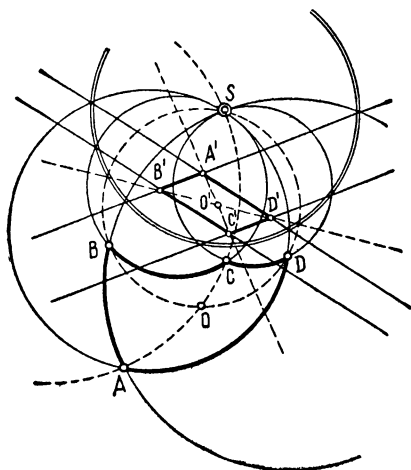


Рис. 121

параболической связке преобразован в обычный параллелограмм с прямолинейными сторонами.

Этой инверсией установлено полное тождество между обеими интерпретациями евклидовой геометрии.

Упражнения

1. Будем называть «точкой» окружность на данной плоскости (присоединяя к окружностям прямые — окружности с несобственным центром, точки — «нулевые» окружности). «Прямыми» будем называть пучки окружностей, «плоскостями» — связки окружностей. Доказать, что в полученном «пространстве» применимы все аксиомы сочетания трехмерного пространства Евклида.

2. Назовем «точкой» сферу (к числу сфер отнесем также плоскости — сферы с несобственным центром и точки — «нулевые сферы»). «Прямыми» будем называть пучки сфер, «плоскостями» — связки сфер, «трехмерным пространством» — сеть сфер. Назовем «пространством четырех измерений» (или «четырёхмерным пространством») множество всех сферических сетей. Доказать, что в каждом из этих «трехмерных пространств» имеют место все аксиомы сочетания геометрии Евклида.

Имея в виду четырехмерное пространство предыдущей задачи, доказать предложения:

3. Четыре точки, не лежащие в одной и той же плоскости, определяют единственное трехмерное пространство.

4. Два трехмерных пространства всегда имеют единственную общую плоскость.

5. Если три точки плоскости, не лежащие на одной и той же прямой, принадлежат трехмерному пространству, то и все точки этой плоскости принадлежат этому же пространству.

6. Если две точки прямой принадлежат трехмерному пространству, то и все точки этой прямой принадлежат этому же пространству.

7. Трехмерное пространство и не принадлежащая ему плоскость имеют единственную общую прямую.

8. Трехмерное пространство и не принадлежащая ему прямая имеют единственную общую точку.

9. Две плоскости, не принадлежащие к одному и тому же трехмерному пространству, имеют единственную общую точку.

10. Трехмерное пространство однозначно определяется: а) плоскостью и не принадлежащей ей точкой; б) двумя скрещивающимися прямыми; в) плоскостью и пересекающей эту плоскость прямой.

11. В четырехмерном пространстве существует по крайней мере 5 точек, не принадлежащих одному и тому же трехмерному пространству.

Глава 9

ОСУЩЕСТВЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО — БОЛЬЯИ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СЕТИ СФЕР

9. 1. Подобно тому как в предыдущей главе для построения пространства, изоморфного с пространством Евклида, мы воспользовались параболической сетью сфер, для построения неевклидова пространства Лобачевского — Больяи мы используем гиперболическую сеть сфер.

Назовем а б с о л ю т о м некоторую постоянную сферу Σ и будем считать «точкой» нашего пространства каждую п а р у точек, взаимных в инверсии относительно абсолюта. Точки абсолюта мы будем считать н е п р и н а д л е ж а щ и м и нашему пространству. «Прямыми»

назовем все окружности, ортогональные к абсолюту, т. е. все неподвижные окружности в инверсии относительно абсолюта. «Плоскостями» назовем все сферы, ортогональные к абсолюту, т. е. все неподвижные сферы той же инверсии. Таким образом, мы получаем гиперболическую сеть сфер, ортогональной сферой которой служит абсолют.

В дальнейшем мы будем для краткости геометрию Лобачевского—Больяи называть «гиперболической».

Проверим прежде всего применимость аксиом сочетания в этой геометрии.

$A_1^{(1)}$. *Существует единственная прямая, проходящая через две данные точки.*

В нашей реализации двум данным точкам соответствуют две пары взаимных в инверсии точек. Единственная окружность, ортогональная к абсолюту, определяется тремя из этих точек, а четвертая из них в силу свойств инверсии будет лежать на той же окружности.

Аксиома $A_2^{(1)}$ о том, что на каждой прямой существуют по крайней мере две точки и что существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной и той же прямой, совершенно очевидна и в нашей реализации.

$A_3^{(1)}$. *Существует единственная плоскость, проходящая через три точки, не лежащие на одной и той же прямой.*

При наших условиях это значит, что даны три пары взаимных в инверсии точек, не принадлежащих одной и той же окружности, ортогональной к абсолюту. Три из этих точек возьмем внутри абсолюта, а четвертую вне его. Этими четырьмя точками определяется единственная сфера, ортогональная к абсолюту. В силу свойств инверсии эта сфера пройдет и через две из остальных точек — вне абсолюта.

$A_4^{(1)}$. *Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и все точки этой прямой принадлежат той же плоскости.*

$A_5^{(1)}$. *Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют по крайней мере и еще общую точку.*

$A_6^{(1)}$. *Существует по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной и той же плоскости.*

Все эти аксиомы, а также и все следствия из совокупности аксиом сочетания легко проверяются так же, как это делалось в предыдущей главе.

9. 2. Дальнейшее изучение гиперболической геометрии мы будем сначала проводить на гиперболической плоско-

сти, в качестве которой мы возьмем одну из сфер сети с несобственным центром, т. е. обычную плоскость, проходящую через центр абсолюта.

Абсолютом на этой плоскости служит окружность σ , по которой пространственный абсолют пересекает нашу плоскость. «Точкой» мы по-прежнему будем называть пару точек, взаимных в инверсии относительно этой окружности. «Прямыми» в соответствии с нашим определением мы будем считать окружности, ортогональные к абсолюту,

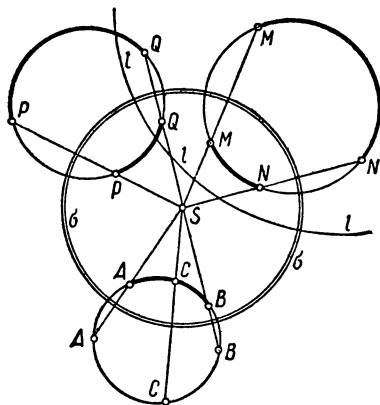


Рис. 122

т. е. окружности гиперболической связки, ортогональной окружностью которой служит абсолют. К числу «прямых» мы должны будем отнести и обычные прямые, проходящие через радикальный центр связки.

Нетрудно убедиться в том, что в полученной нами гиперболической планиметрии имеют место все аксиомы порядка. Например, на рисунке 122 показан «отрезок» AB с точкой C на нем, которая лежит между

точками A и B , причем мы можем записать: $A \rightarrow C \rightarrow B$. Это объясняется тем, что луч SC проходит между лучами SA и SB внутри угла ASB , который всегда меньше развернутого.

На том же рисунке 122 «прямая» l разделяет плоскость на две полуплоскости: к одной из этих полуплоскостей относятся внутренние точки, определяемые окружностью l , ко второй — внешние. «Отрезок» MN , соединяющий две точки одной и той же полуплоскости, не может пересечь «прямую» l , так как если бы дуга MN пересекла окружность l , то, двигаясь непрерывно по этой дуге от M к N , мы перешли бы из внутренней области во внешнюю, а при переходе к точке N из внешней области мы должны были еще раз пересечь окружность l . Этим двум точкам пересечения соответствовали бы еще две, взаимные с ними в инверсии, точки пересечения. Но четырех общих точек

две различные окружности иметь не могут, поэтому «отрезок» \overline{MN} не пересекает прямую l .

С другой стороны, «отрезок» \overline{PQ} , соединяющий точки различных полуплоскостей, пересекает «прямую» l в одной и только одной точке.

Заметим, что ввиду отождествления внутренней и взаимной с ним внешней точек абсолюта мы можем ограничиться в дальнейшем рассмотрением лишь одной из двух областей, например внутренней.

При этом мы будем помнить, что каждому геометрическому образу внутри абсолюта соответствует его «отражение» от абсолюта, которое лежит во внешней области.

9. 3. Как и во всем предыдущем изложении, конгруэнтность фигур мы определим через осевую симметрию, причем осевой симметрией мы и здесь будем называть инверсию (конечно, гиперболическую) относительно любой из наших «прямых», т. е. окружностей гиперболической связи.

Посмотрим, как при этом условии выполняются аксиомы третьей группы.

Аксиома $A_1^{(3)}$ говорит о том, что при осевой симметрии точки одной полуплоскости взаимно отображаются на точки другой полуплоскости, при этом точки оси симметрии остаются неподвижными.

На рисунке 123 показана «симметрия» относительно «прямой» s . Ввиду того что окружность s ортогональна к окружности абсолюта, инверсия относительно s преобразует абсолюта в самого себя и точки одной «полуплоскости» (расположенные внутри s) преобразуются в точки другой «полуплоскости» (расположенные вне s). Так как взаимные в инверсии точки новой инверсией преобразуются вновь во взаимные, то точка, определяемая парой (AA) , преобразуется в точку, определяемую парой $(A'A')$.

Так как инверсия преобразует окружность, ортогональную к абсолюту, в окружность, тоже ортогональную к

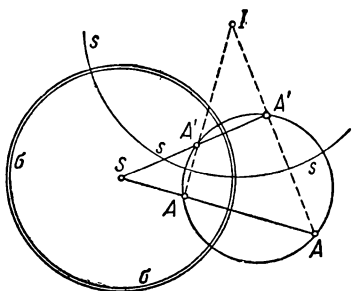


Рис. 123

абсолюту, то выполняется аксиома $A_2^{(3)}$: точки, лежащие на одной и той же прямой, преобразуются в точки, также лежащие на одной и той же прямой, порядок точек сохраняется.

На рисунке 124 показано построение, доказывающее справедливость аксиомы $A_3^{(3)}$: две различные точки определяют единственную ось симметрии, относительно которой они преобразуются друг в друга. Две данные точки определяются парами (AA') и $(A'A')$. Через эти две точки проходит единственная «прямая» a (т. е. одна из окружностей

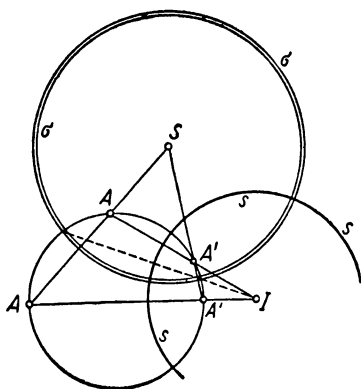


Рис. 124

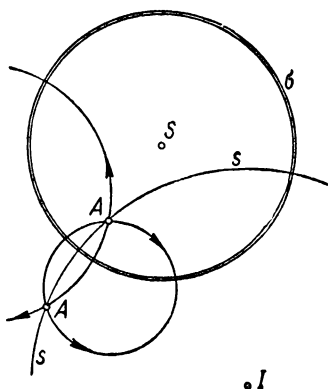


Рис. 125

связки). Искомая «ось симметрии» s является ортогональной окружностью пучка, определяемого окружностями s и σ , центр этой окружности лежит в пересечении прямой AA' с радикальной осью пучка.

Столь же просто доказывается и аксиома $A_4^{(3)}$: два луча с общей вершиной определяют единственную ось симметрии, преобразующую их друг в друга. Очевидно, искомой «осью симметрии» будет окружность инверсии двух пересекающихся направленных окружностей. Эта окружность инверсии принадлежит пучку, определяемому двумя данными окружностями, и, следовательно, принадлежит связке (рис. 125).

Следующая аксиома $A_5^{(3)}$: две взаимно симметричные фигуры новой симметрией преобразуются в две фигуры, симметричные относительно той прямой, в которую пре-

образуется ось прежней симметрии, — является непосредственным следствием свойств гиперболической инверсии: две взаимные в этой инверсии фигуры преобразуются новой инверсией в две фигуры, взаимные относительно той окружности, в которую преобразуется окружность первоначальной инверсии.

Из истинности этих аксиом следует также истинность всех выводов из них. В частности, остается в силе прежнее определение перпендикуляра: ось симметрии перпендикулярна к прямой, проходящей через пару взаимно симметричных точек; перпендикулярность есть свойство взаимное; через данную точку к данной прямой можно провести единственный перпендикуляр.

Собственное и несобственное движение определяется как результат последовательного применения соответственно четного или нечетного числа осевых симметрий, а в связи с этим определяются собственно и несобственно конгруэнтные фигуры.

Покажем, наконец, что имеет место и последняя из аксиом третьей группы — $A_6^{(3)}$: на данной прямой в данном направлении от данной точки можно отложить один и только один отрезок, равный данному.

Действительно, пусть наша «прямая» является окружностью связи, пересекающей абсолют в точках M и N . «Отрезок» \overline{AB} определяется точками A и B на этой прямой. Пусть вторая «прямая» пересекает абсолют в точках M' и N' и на ней задана точка A' . Если некоторое движение (т. е. последовательность инверсий) преобразует первую прямую во вторую, точку A в A' и точку B в B' , то в силу инвариантности ангармонического отношения мы получим:

$$(A'B'M'N') = (ABMN) = k.$$

Так как точки A' , M' и N' заданы и дано число k , то положение точки B' определяется однозначно, независимо от того движения, посредством которого мы переносили отрезок \overline{AB} с первой прямой на вторую.

9. 4. Нам остается только показать бесконечность построенного нами пространства и установить применимость в нем аксиом непрерывности. Для этого покажем прежде всего, что «прямые» нашего пространства бесконечны, т. е. что никаким конечным числом шагов мы не сможем дойти до конца «прямой». Рассмотрим «прямую» l и на ней «отре-

зок» $\overline{AA_1}$. Проведем через точку A_1 «перпендикуляр» s_1 к «прямой» l и найдем точку A_2 , «симметричную» с A относительно s_1 . Получим, что $\overline{AA_1} = \overline{A_1A_2}$. Далее проведем через A_2 «перпендикуляр» к «прямой» l и найдем точку A_3 , «симметричную» с A_1 относительно s_2 , и получим, что $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3}$ и т. д. Обозначив через M и N точки пересечения l с абсолютом, покажем, что, двигаясь равными шагами от точки A по направлению к N , мы никогда до точки N не дойдем. Ограничимся для определенности рассмотрением точек той дуги окружности l , которая лежит внутри абсолюта. Инверсия относительно s_1 преобразует точку M в N , точку A в A_2 и точку A_1 оставляет неподвижной (рис. 126). Отсюда имеем: $(AA_1MN) = (A_2A_1NM)$.

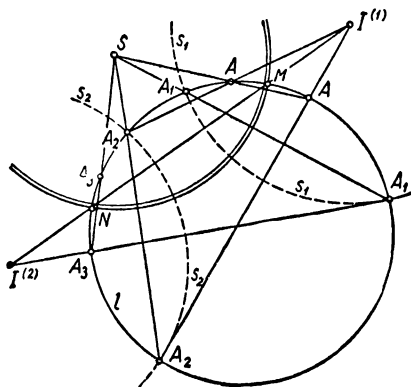


Рис. 126

Но так как в символе ангармонического отношения можно переставить две пары букв, не изменяя его числовое значение, то получим:

$$(AA_1MN) = (A_1A_2MN).$$

Очевидно, далее тем же путем получим:

$$(A_1A_2MN) = (A_2A_3MN) \text{ и т. д.}$$

Так как точки A и A_1 находятся на дуге MN , то постоянное числовое значение всех полученных ангармонических отношений есть одно и то же положительное число, в чем нетрудно убедиться, спроектировав точки A , A_1 , M ,

как тогда получилось бы, что $(A_{n-1}A_nMN) = \frac{\overline{MA_{n-1}}}{\overline{MN}} : \frac{\overline{NA_{n-1}}}{\overline{NN}} =$
 $= \frac{\overline{MA_{n-1}}}{\overline{MN}} \cdot \frac{0}{\overline{NA_{n-1}}} = 0$.

Рис. 127

Рис. 127

Вместе с тем при помощи приема, аналогичного тому, каким мы пользовались в предыдущей главе, можно доказать аксиому $A_1^{(4)}$ (Архимеда): повторяя данный отрезок слагаемым достаточное число раз, мы можем получить отрезок, больший любого данного отрезка. И, наконец, поскольку аксиома $A_2^{(4)}$ (Кантора) справедлива для дуг окружностей, значит, она истинна и в нашей геометрии.

Мы видим, что построенная нами система геометрии изоморфна в отношении этих аксиом с абсолютной геометрией.

Наличие этих аксиом позволяет сравнивать отрезки и углы, причем величина угла может быть выражена в обычной градусной мере. Далее, при помощи известных из курса геометрии выводов мы можем получить теоремы о соотношениях между сторонами и углами треугольника, теоремы о геометрическом месте точек (ось симметрии двух точек и биссектриса угла), признаки равенства треугольников и т. д. Например, на рисунке 127 показано построение окружности, вписанной в треугольник ABC . Принципиаль-

но оно ничем не отличается от такого же построения, показанного в предыдущей главе.

9. 5. Однако как только мы поставим вопрос о существовании прямой, не пересекающей данную прямую, то мы убедимся, что, несмотря на полное совпадение всех предложений абсолютной геометрии в нашей новой планимет-

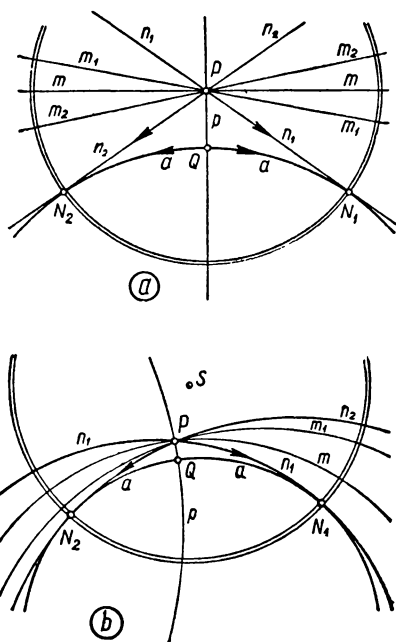


Рис. 128

рии и в планиметрии евклидовой, проблема параллельности здесь разрешается совершенно по-новому. Возьмем «прямую» a и вне ее точку P . На рисунке 128, a для упрощения построения точка P взята в радикальном центре связки. Это нисколько не нарушает общности наших рассуждений, так как любую фигуру, состоящую из прямой и точки вне ее, можно движением преобразовать так, что данная точка совпадает с центром связки. Через точку P проведем «перпендикуляр» p к «прямой» a и через эту же точку проведем «перпендикуляр» m к «прямой» p . «Пря-

мые» a и t не пересекаются, будучи перпендикулярными к одной и той же прямой. В то же время нетрудно убедиться в том, что, кроме «прямой» t , существует еще бесконечное множество «прямых», проходящих через точку P и не пересекающих a . Действительно, проведем через точку P две «прямые» n_1 и n_2 , проходящие соответственно через точки N_1 и N_2 , в которых окружность a пересекает абсолют. Совершенно очевидно, что все «прямые», проходящие внутри угла N_1PN_2 через его вершину P , пересекают «прямую» a , так как внутри этого угла находится вся окружность a . В то же время все «прямые», проходящие через точку P вне угла N_1PN_2 , не пересекают «прямой» a . Итак, мы получили предложение, противоречащее аксиоме параллельности геометрии Евклида: *существует бесконечное множество прямых, проходящих через данную точку вне прямой и не пересекающих эту прямую* (см. также черт. 128, б).

Из этого сейчас же следует, что свойства параллельных евклидовой геометрии нельзя вывести из аксиом абсолютной геометрии, так как существует такая геометрическая система, в которой все аксиомы абсолютной геометрии справедливы, а аксиома параллельности не верна. Другими словами, это значит, что аксиома параллельности евклидовой геометрии не зависит от предложений абсолютной геометрии и средствами этой геометрии ее нельзя доказать, ни опровергнуть нельзя.

Н. И. Лобачевский, создавая неевклидову геометрию, исходил из аксиомы, в которой утверждается, что существуют по крайней мере две прямые, проходящие через данную точку и не пересекающие данной прямой. Но тогда отсюда сейчас же следует, что существует и бесконечное множество прямых, проходящих через ту же точку и также не пересекающих данную прямую. Например, если допустим, что на рисунке 129 прямые PM и PN не пересекают прямую a , то непересекающими будут и все прямые, проходящие через точку P внутри угла MPN . Вместе с тем через ту же точку P проходит и бесконечное множество прямых, пересекающих прямую a : каждая из них определяется точкой P и любой точкой прямой a . Из соображений непрерывности заключаем, что должны существовать две прямые, отделяющие множество пересекающих от множества непересекающих прямых. Эти прямые не могут быть

пересекающимися, так как за каждой точкой пересечения всегда идет следующая точка прямой (например, Q' за Q на рис. 129). Такие граничные непересекающиеся Лобачевский назвал п а р а л л е л ь н ы м и. На рисунке 128 параллельными являются «прямые» n_1 и n_2 , касающиеся окружности a в точках N_1 и N_2 , не принадлежащих нашей плоскости, так как они принадлежат абсолюту.

Прямые m, m_1, m_2, \dots , не пересекающие прямой и не параллельные ей, называются р а с х о д я щ и м и с я прямыми с прямой a . Уже из того факта, что в гиперболической планиметрии не имеет места аксиома параллельности геометрии Евклида, можно сделать чрезвычайно важное заключение:

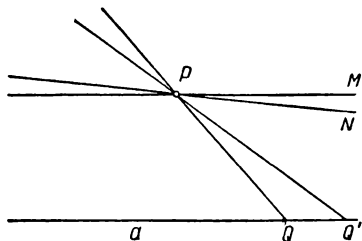


Рис. 129

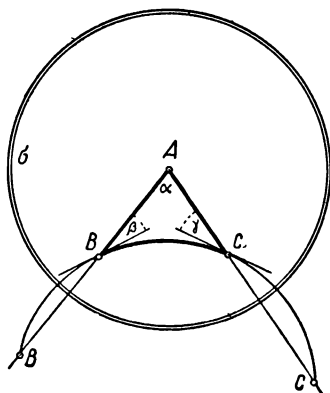


Рис. 130

Т₁. В гиперболической геометрии сумма внутренних углов треугольника не постоянна и всегда меньше 180° .

Действительно, если бы эта сумма была постоянна, то она непременно равнялась бы 180° (см. упражнение 2 к главе 1) и тогда мы имели бы геометрию Евклида (Т₁, п. 45.). В той же главе 4 было доказано, что сумма внутренних углов треугольника не может быть больше 180° . Итак, в гиперболической геометрии эта сумма и не постоянна и меньше 180° . Это свойство внутренних углов гиперболического треугольника показано на рисунке 130. Любой «треугольник» при помощи одной «симметрии» можно преобразовать так, чтобы одна из его вершин (например, A на рис. 130) совпала с центром связки. При этом «треугольник» преобразуется в «равный» с такими же углами. На рисунке 130 сумма углов прямолинейного треугольника

ABC равна 180° , тогда как сторона BC гиперболического треугольника ABC обращена выпуклостью к центру связки и углы β и γ при вершинах B и C меньше углов прямолинейного треугольника при тех же вершинах.

Итак, $\alpha + \beta + \gamma < 180^\circ$.

9.6. Рассмотрим некоторые свойства параллельных, расходящихся и пересекающихся прямых в гиперболической плоскости.

Параллельные прямые n_1 и n_2 на рисунке 128 отличаются друг от друга тем, что первая из них n_1 параллельна прямой a в направлении QN_1 , а вторая — n_2 параллельна прямой a в противоположном направлении QN_2 . Острый угол между перпендикуляром PQ к прямой a и параллельной n_1 называется углом параллельности для расстояния $PQ = x$. Второй угол параллельности, симметричный с первым, образует с тем же перпендикуляром прямая n_2 .

Из этих определений получаем ряд непосредственных следствий.

С₁. *Через данную точку к данной прямой можно провести одну и только одну параллельную в данном направлении.*

Центр O искомой окружности гиперболической связки единственным образом определяется пересечением касательной в точке M , где абсolut пересекает окружность a (рис. 131), и оси симметрии точки M и данной точки P .

Итак, $n \hat{\parallel} a$ (знак $\hat{\parallel}$ обозначает параллельность в данном направлении).

С₂. *Если $n \hat{\parallel} a$ и через любую точку прямой n провести параллельную к прямой a в том же направлении, то новая параллельная совпадает с n .*

Пусть $Q \subset n$ (рис. 131). Чтобы найти центр окружности, являющейся «параллельной в данном направлении» к «прямой» a , находим точку пересечения касательной к абсolutу в точке M с осью симметрии точек M и Q . Но это будет та же самая точка O — центр окружности n .

Т₁. *Соотношение параллельности в данном направлении удовлетворяет условиям симметрии, рефлексивности и транзитивности:*

1) если $a \hat{\parallel} b$, то $b \hat{\parallel} a$; 2) $a \hat{\parallel} a$; 3) если $a \hat{\parallel} b$, $b \hat{\parallel} c$, то $a \hat{\parallel} c$.

1. Взаимность параллельности есть результат того, что

соответствующие окружности связки касаются в точке, принадлежащей абсолюту. Касание же окружностей есть свойство взаимное.

2. Если в построении, указанном на рисунке 131, данную точку P взять на прямой a , то мы этим построением получим ту же самую прямую. Итак, $a \hat{=} a$.

3. Если $a \hat{=} b$, $b \hat{=} c$, то ввиду того, что направления взяты одни и те же, все три окружности имеют общую точку касания. Поэтому $a \hat{=} c$ (рис. 132).

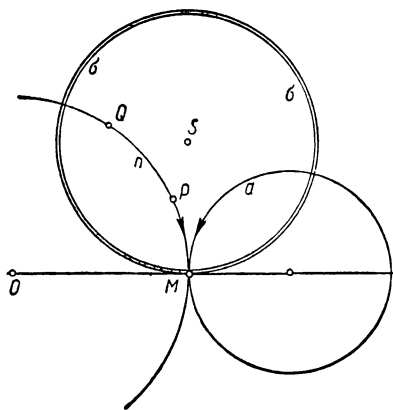


Рис. 131

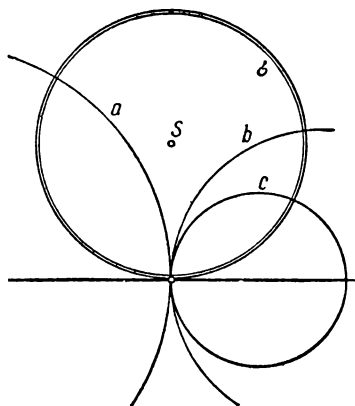


Рис. 132

С₃. Ось симметрии двух взаимно параллельных прямых есть прямая, параллельная этим прямым в том же направлении. Она называется *осью полосы*, определяемой этими параллельными.

Эта ось симметрии есть окружность инверсии, преобразующая данные «параллельные» друг в друга, проходит через их точку касания и принадлежит параболическому пучку, определяемому этими «параллельными» (рис. 133).

Т₂. Для каждого острого угла существует единственная прямая, перпендикулярная одной из его сторон и параллельная другой.

По-прежнему для упрощения построения мы перенесем вершину S угла в центр гиперболической связки (рис. 134.)

Искомая «прямая» представляет собой одну из окружностей связки, причем центр этой окружности лежит на пересечении одной из сторон угла (сторона b на рис. 134) и касательной к абсолюту в точке пересечения его со второй стороной (точка M на рис. 134). Полученная окружность касается стороны a и пересекает ортогонально сторону b . Так как центр O окружности связки определяется единственным образом, то, значит, полученная «прямая» единственная.

Расстояние x от вершины O до параллельной n определяется однозначно углом параллельности $\angle aSb$ и называется расстоянием параллельности.

Т₃ (обратная). Каждый данный отрезок x однозначно определяет острый угол параллельности, для которого он служит расстоянием параллельности.

Отложим данный отрезок x от точки S (центр абсолюта) до точки P (рис. 134) на прямой b . На прямой b существует

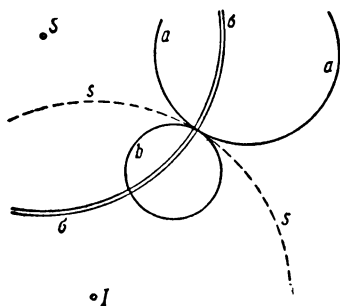


Рис. 133

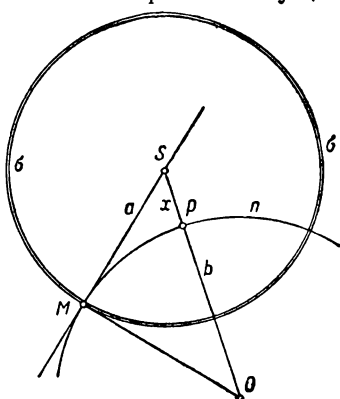


Рис. 134

единственная точка O — центр окружности связки, которая проходит через точку P и парную с этой точкой в инверсии относительно абсолюта. Касательная a , проведенная из центра S к полученной окружности, определяет искомый угол aSb .

Из третьей теоремы мы видим, что угол параллельности есть функция отрезка x — расстояния параллельности. Эта функция называется функцией Лобачевского и

согласно принятому им обозначению записывается символом $\varphi = \Pi(x)$, где φ — угол параллельности, x — расстояние параллельности.

9.7. Выше мы видели, что в гиперболической геометрии, кроме пересекающихся и параллельных «прямых», существуют еще и *расходящиеся* прямые, которые изображаются окружностями связки, не имеющими общих точек. Основное свойство двух расходящихся прямых выражается теоремой.

Т₁. *Существует единственная прямая, перпендикулярная к двум расходящимся прямым.*

Две окружности связки, изображающие расходящиеся прямые (рис. 135) и не имеющие общих точек, определяют гиперболический пучок. Искомая «прямая» P является одной из окружностей ортогонального эллиптического пучка, а центр ее есть единственный радикальный центр гиперболической связки, определяемый двумя данными «прямыми» a и b и окружностью абсолюта σ .

Т₂ (обратная). *Если существует прямая, перпендикулярная к двум данным прямым, то эти прямые расходящиеся.*

Окружность, отображающая данную прямую, и окружность абсолюта определяют эллиптический пучок. Две ортогональные к ним окружности, соответствующие двум «перпендикулярам», принадлежат ортогональному гиперболическому пучку и потому не имеют общих точек, т. е. являются расходящимися «прямыми».

Итак, на гиперболической плоскости существуют *три* возможных случая расположения двух прямых: 1) пересечение, 2) параллельность, 3) расходимость. В связи с этим мы можем дать следующее определение различным видам пучков прямых в этой плоскости.

Д₁. *Если все прямые пучка проходят через одну и ту же общую точку, то пучок называется эллиптическим.*

Если все прямые пучка параллельны одной и той же прямой в данном направлении, то пучок называется *параболическим*.

Если все прямые пучка перпендикулярны к одной и той же прямой, то пучок называется *гиперболическим*.

Очевидно, это определение вполне соответствует определению эллиптических, параболических и гиперболических пучков в одной и той же гиперболической связке.

Все виды пучков показаны на рисунке 136: (а) — эллиптический, (b) — параболический, (с) — гиперболический.

В связи с существованием трех видов пучков прямых в гиперболической плоскости существуют три вида замечательных кривых, которые определяются подобно тому, как определялась окружность в евклидовой плоскости.

Д₂. а) Геометрическое место точек, симметричных с данной точкой относительно всех прямых данного эллиптического пучка, называется о к р у ж н о с т ь ю. Точка пе-

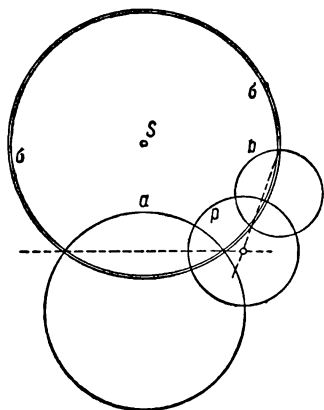


Рис. 135

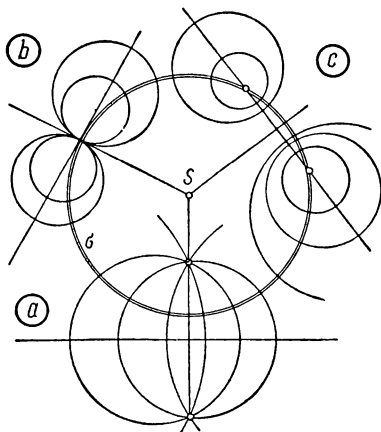


Рис. 136

ресечения прямых называется ц е н т р о м окружности.

б) Геометрическое место точек, симметричных с данной точкой относительно каждой прямой параболического пучка, называется п р е д е л ь н о й о к р у ж н о с т ь ю или о р и ц к л о м.

в) Геометрическое место точек, симметричных относительно всех прямых одного и того же гиперболического пучка, называется л и н и е й р а в н ы х р а с с т о я н и й или э к в и д и с т а н т о й. Прямая, к которой перпендикулярны все прямые пучка (ось пучка), называется о с ь ю э к в и д и с т а н т ы.

Во всех трех случаях прямые пучка называются д и - а м е т р а л ь н ы м и п р я м ы м и соответствующей кривой.

Непосредственно из этого определения следует общее свойство всех этих кривых.

С₁. Окружность, орицикл и эквидистанта симметричны относительно каждой из своих диаметральных прямых. В каждой из этих кривых равным дугам соответствуют и равные хорды.

На рисунке 137, *а* показана о к р у ж н о с т ь в г и п е р б о л и ч е с к о й п л о с к о с т и. Она ортогональна ко всем

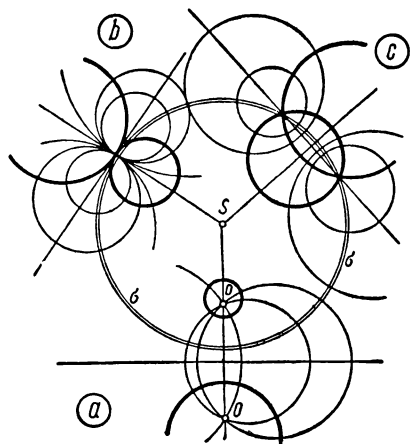


Рис. 137

«прямым» эллиптической связи. Очевидно, для нее справедливы все известные теоремы об окружности, опирающиеся на аксиомы абсолютной геометрии.

На рисунке 137, *б* изображен о р и ц и к л в виде окружности, ортогональной к параболическому пучку окружностей связи.

На рисунке 137, *с* изображена э к в и д и с т а н т а — окружностью, ортогональной к гиперболическому пучку окружностей связи.

9.8. Ввиду того,

что «точкой» гиперболического пространства мы считаем пару точек, взаимных в инверсии относительно абсолюта, «окружность», орицикл и эквидистанта изображаются д в у м я окружностями, взаимными в инверсии относительно абсолюта. Однако, как мы уже указали выше, для изучения свойств этих фигур достаточно ограничиться внутренней областью абсолюта.

Т₁. Три точки, не лежащие на одной и той же прямой, определяют либо единственную окружность, проходящую через них, либо единственный орицикл, либо единственную эквидистанту.

Действительно, если внутри абсолюта взять произвольным образом три точки и провести через них окружность, то эта окружность будет либо целиком лежать внутри абсолюта, либо касаться его, либо пересекать в двух точках.

В первом случае мы получим «окружность» гиперболической плоскости, во втором — орицикл, в третьем — эквидистанту. Если, в частности, эта окружность будет ортогональна к абсолюту, то она окажется «прямой» гиперболической плоскости — случай, который мы исключили в условии теоремы. Если же заданные точки окажутся на обычной прямой и если она не пройдет через центр абсолюта, то она будет эквидистантой гиперболической плоскости.

С₁. Три оси симметрии трех точек гиперболической плоскости принадлежат одному и тому же пучку прямых: либо эллиптическому, либо параболическому, либо гиперболическому.

Очевидно, эти три оси будут служить диаметрными прямыми той кривой, которая определяется этими тремя точками. В случае «окружности» они принадлежат эллиптическому пучку диаметров, в случае орицикла — параболическому, в случае эквидистанты (или прямой) — гиперболическому.

Т₂. Все орициклы конгруэнтны между собой.

Возьмем два орицикла ω и ω' (рис. 138) и покажем, что их можно преобразовать друг в друга осевой симметрией (т. е. инверсией относительно гиперболической «прямой»). Обозначим через T и T' точки касания к абсолюту окружностей, изображающих орициклы. Примем за центр инверсии точку I пересечения прямой TT' с линией центров OO' окружностей ω и ω' и проведем из этого центра окружность, ортогональную к абсолюту. Эта инверсия преобразует абсолют в самого себя, точку T — в T' и окружность ω — в окружность, касательную к абсолюту в точке T' и с центром на прямой $O'I$, т. е. в окружность ω' . Итак, $\omega = \omega'$. Полученное построение окажется невозможным, если точки T и T' совпадают. Таковы, например, орициклы ω и ω_1 на рисунке 138. В этом случае орициклы имеют один и тот же пучок диаметров и называются к о н -

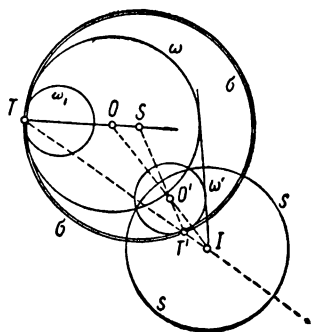


Рис. 138

центрическими. Но в этом случае мы имеем: $\omega = \omega'$ и $\omega_1 = \omega'$, значит, $\omega = \omega_1$.

Т₃. *Эквидистанта есть геометрическое место точек, равноудаленных от данной прямой.*

Рассмотрим «прямую» l (рис. 139) и вне ее точку A . «Перпендикуляр» AP определяет «расстояние» точки A от l . Чтобы получить точку, находящуюся на таком же расстоянии от l , проведем «перпендикуляр» s и найдем точки A' и P' , «симметричные» с A и P относительно s . При этом $\overline{A'P'} = \overline{AP}$ и $A'P' \perp s$. Вместе с тем, по определению, точки A и A' принадлежат эквидистанте ϵ , определяемой осью l и гиперболическим пучком перпендикулярных к ней прямых. Вторая ветвь той же эквидистанты ϵ симметрична с первой относительно оси l .

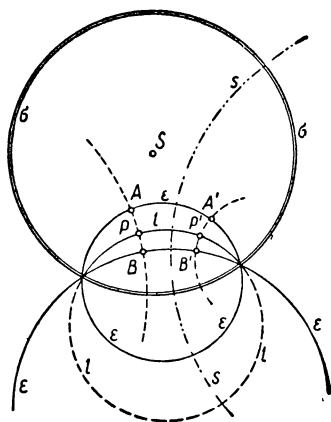


Рис. 139

Действительно, две окружности ϵ взаимны в инверсии относительно абсолюта, но они же взаимны и в инверсии относительно окружности l , ортогональной к абсолюту. Расстояния точек, лежащих внутри полосы, определяемой двумя ветвями эквидистанты, меньше AP , а расстояния точек, лежащих вне этой полосы, больше AP . Итак, эквидистанта и есть искомое геометрическое место. Этим и объясняется ее название — «линия равных расстояний».

Указанное свойство эквидистанты обнаруживает весьма существенное различие между гиперболической геометрией и геометрией Евклида. В евклидовой геометрии линией равных расстояний служит прямая, параллельная данной прямой. Это часто наглядно иллюстрируют примером железнодорожного пути с двумя параллельными рельсами, лежащими на шпалах одинаковой длины. На гиперболической плоскости, при тех же условиях, если одна из рельс была бы прямолинейной, то другую пришлось бы изогнуть, придав ей форму эквидистанты.

Свойства эквидистанты позволяют доказать следующие теоремы о параллельных и расходящихся прямых.

Т₄. Расстояние¹ между двумя параллельными в направлении параллельности неограниченно уменьшается, приближаясь к нулю, а в противоположном направлении оно неограниченно увеличивается.

Рассмотрим две «параллельные» a и b (рис. 140). Проведем ряд эквидистант с осью l и с постепенно уменьшающимися расстояниями $\overline{SP} > \overline{SN} > \overline{SM}$. Мы видим, что по

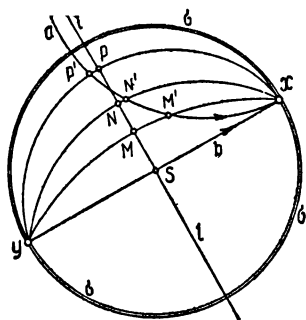


Рис. 140

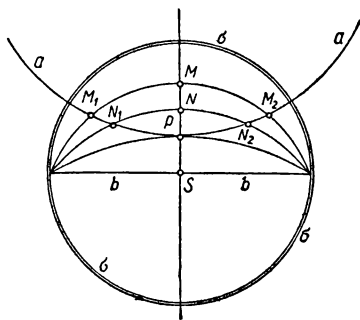


Рис. 141

мере уменьшения расстояний точки пересечения эквидистант с параллельной a смещаются в направлении параллельности и, значит, расстояния от прямой a до прямой b уменьшаются. Вместе с тем, каков бы ни был данный отрезок, расстояния эквидистанты от прямой b можно сделать еще меньше и, значит, это расстояние стремится к нулю. Это же расстояние можно сделать и больше любого данного отрезка и потому на прямой a можно найти точку как угодно далеко отстоящую от прямой b .

Т₅. Расстояние между двумя расходящимися прямыми неограниченно увеличивается по мере удаления точки от их общего перпендикуляра.

На рисунке 141 изображены расходящиеся «прямые» a и b , SP — их общий перпендикуляр. Эквидистанта с осью b и расстоянием SP касается «прямой» a в точке P . Экви-

¹ «Расстоянием» от одной прямой до другой называется величина перпендикуляра, проведенного из точки одной прямой к другой.

дистанта с большим расстоянием \overline{SN} пересекает «прямую» a в точках N_1 и N_2 , симметричных друг с другом относительно оси SP . При еще большем расстоянии — \overline{SM} эквидистанта пересекает a в точках M_1 и M_2 , которые находятся от точки P дальше, чем точки N_1 и N_2 . Очевидно, можно построить эквидистанту с расстоянием, большим любого данного отрезка, и получить на прямой a точки, сколь угодно далеко отстоящие от прямой b .

Упражнения

1. Доказать, что прямая, перпендикулярная к диаметру орицикла или эквидистанты и проходящая через его конец, есть касательная к соответствующей кривой.
2. Доказать, что существует единственная ось симметрии двух расходящихся прямых и что она принадлежит гиперболическому пучку, определяемому этими прямыми.
3. Построить окружность, касающуюся трех данных попарно расходящихся прямых. Исследовать условия возможности решения.
4. Доказать, что существует единственная прямая, параллельная двум сторонам угла, меньшего развернутого.
5. Доказать, что две центрально симметричные между собой прямые — расходящиеся.
6. (Обратно.) Доказать, что существует единственный центр симметрии, преобразующий друг в друга две расходящиеся прямые.
7. Доказать, что расстояние между сторонами острого угла неограниченно возрастает.
8. Если при пересечении двух прямых третьей внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые расходящиеся. Доказать.
9. Как расположена прямая, проходящая через середины двух сторон треугольника, по отношению к третьей стороне?
10. Доказать, что с увеличением расстояния параллельности угол параллельности уменьшается.
11. Доказать, что существуют две и только две прямые, перпендикулярные к одной и параллельные другой из расходящихся прямых.
12. Доказать, что прямая, проходящая через точки пересечения двух орициклов, есть их ось симметрии.

Глава 10

МЕТРИКА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

10.1. Рассмотрим теперь вопрос об измерении геометрических величин в гиперболической геометрии. В общем виде проблема измерения геометрической величины (длины, площади, объема) заключается в следующем. Мы должны

найти метод, при помощи которого можно было бы каждой из данных величин отнести определенное действительное число — меру этой величины. Это число должно удовлетворять условиям: 1) равные величины имеют равные меры; 2) если величина состоит из нескольких величин, то ее мера равна сумме мер всех составляющих величин. Первое из этих условий можно сформулировать иначе: мера величины должна быть инвариантом при всех преобразованиях движения. Установив это, мы можем разрешить вопрос об измерении отрезков.

Прежде всего мы для каждого данного отрезка должны найти действительное число, являющееся инвариантом при преобразованиях движения. А так как каждое движение можно представить в виде ряда последовательных осевых симметрий, то это число должно быть инвариантом при осевой симметрии. В нашей реализации гиперболической плоскости за осевую симметрию принимается инверсия относительно окружности связки. Выше мы доказали, что числовым инвариантом при инверсии является ангармоническое отношение четырех точек. Итак, возьмем на «прямой» l «отрезок» \overline{AB} (рис. 142) и обозначим через M и N точки пересечения окружности l с окружностью абсолюта σ . «Ось симметрии» s преобразует «прямую» l в «прямую» l' и точки A, B, M, N соответственно в точки A', B', M', N' .

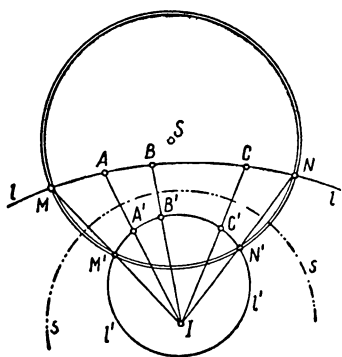


Рис. 142

Как уже ранее было доказано, $(ABMN) = (A'B'M'N')$ и потому каждый «отрезок» \overline{AB} однозначно определяет число $(ABMN)$, сохраняющееся при всех «движениях» отрезка.

Посмотрим, удовлетворяет ли это число второму условию измерения. Возьмем на прямой l еще точку C так, чтобы точка B лежала между A и C , и тогда будем иметь: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ (рис. 142).

Вместе с тем для соответствующих ангармонических отношений получим значения:

$$(ABMN) = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} : \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}, \quad (BCMN) = \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} : \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}}$$

и $(ACMN) = \frac{\overline{MA}}{\overline{MC}} : \frac{\overline{NA}}{\overline{NC}}.$

Перемножая два первых отношения, получим:

$$\left(\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} : \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \right) \cdot \left(\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} : \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \right) = \frac{\overline{MA}}{\overline{MC}} : \frac{\overline{NA}}{\overline{NC}},$$

т. е. $(ABMN)(BCMN) = (ACMN).$

Итак, сумме отрезков соответствует ангармоническое отношение, равное произведению ангармонических отношений слагаемых. Поэтому ангармоническое отношение н е л ь з я принять за меру длины отрезка. Однако положение очень легко исправить, приняв за меру длины отрезка л о г а р и ф м с о о т в е т с т в у ю щ е г о ангармонического отношения. Тогда логарифм произведения ангармонических отношений будет равен сумме логарифмов сомножителей, т. е. мера длины суммы двух отрезков будет равна сумме мер длины слагаемых. Итак, мера длины н а п р а в л е н н о г о отрезка \overline{AB} , которую мы будем обозначать символом (\overline{AB}) , равна: $(\overline{AB}) = \kappa \ln (ABMN).$

Здесь логарифм можно взять по любому основанию, но для удобства дальнейших преобразований берут обычно натуральный логарифм (символ — \ln), основанием которого служит иррациональное число e ($e = 2,718281828459045...$).

Постоянный коэффициент k определяется тем отрезком, мера длины которого равна единице. Так, например, если мы хотим, чтобы было $k = 1$, то за единичный отрезок нужно взять такой, для которого ангармоническое отношение равно основанию логарифмов — числу e , тогда логарифм отношения будет равен единице и $k = 1$. В дальнейшем мы будем предполагать, что все отрезки измерены именно такой единицей, т. е. что $(\overline{AB}) = \ln (ABMN).$

Из определения меры длины сразу же получаем:

$$C_1. \quad (\overline{BA}) = -(\overline{AB}).$$

Действительно, если $(ABMN) = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} : \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}$, то $(BAMN) = -\frac{\overline{MB}}{\overline{MA}} : \frac{\overline{NB}}{\overline{NA}} = \frac{1}{(ABMN)}$, поэтому $\ln(BAMN) = -\ln(ABMN)$.
 C_2 . Если $A \equiv B$, то $(\overline{AB}) = 0$.
 $(AAMN) = \frac{\overline{MA}}{\overline{MA}} : \frac{\overline{NA}}{\overline{NA}} = 1$; но $\ln 1 = 0$, поэтому $(\overline{AB}) = 0$.
 C_3 . $(n\overline{AB}) = n(\overline{AB})$.

Если $\overline{PQ} = \overline{AB} + \overline{AB} + \dots + \overline{AB}$ (n раз), то $(PQMN) = (ABMN)^n$, поэтому $\ln(PQMN) = \ln(ABMN)^n = n \ln(ABMN)$ и, следовательно, $(n\overline{AB}) = n(\overline{AB})$. Это значит, что, повторяя данный отрезок слагаемым достаточно большое число раз, мы можем получить отрезок, мера длины которого будет больше любого данного отрезка.

10.2. Пользуясь полученным нами определением меры длины отрезка, мы можем найти замечательное соотношение между расстоянием параллельности и углом параллельности, т. е. функцию Лобачевского.

Из общих геометрических соображений мы можем вывести, что эта функция монотонно убывающая (см. упражнение 10 к предыдущей главе). На рисунке 143 вершина B угла параллельности совмещена с центром связки. Расстояние параллельности постоянно увеличивается:

$\overline{A_1B} < \overline{A_2B} < \overline{A_3B} < \overline{A_4B} < \dots$ Вместе с этим постоянно

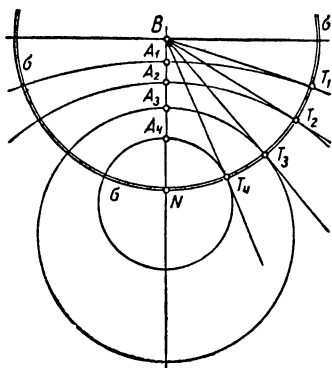


Рис. 143

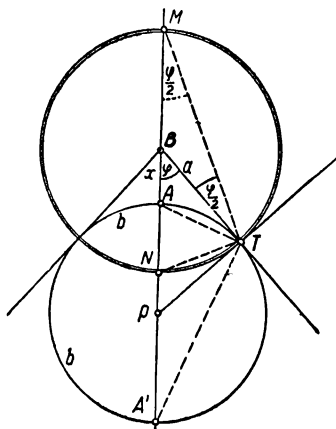


Рис. 144

уменьшаются углы параллельности: $\angle T_1BN > \angle T_2BN > \angle T_3BN > \angle T_4BN > \dots$ очевидно, что верхней границей угла параллельности является $\frac{\pi}{2}$, а нижней границей—0.

Дадим теперь точное аналитическое выражение функции Лобачевского.

Пусть через точку B проходит прямая a параллельно прямой b (рис. 144), AB — расстояние параллельности, $\angle TBA = \varphi$ — угол параллельности. Как уже указывалось ранее, положение точки B в центре связки не оказывает влияния на общность наших выводов, так как движением можно всякую фигуру переместить в любое место плоскости, не изменяя длины отрезков и величины углов.

Обозначим через x меру длины расстояния параллельности $x = (AB)$, тогда $\varphi = \Pi(x)$ — функции Лобачевского.

Согласно определению $x = \ln(ABMN) = \ln \left[\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} : \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \right] = \ln \left[\frac{\overline{MA}}{\overline{NA}} : \frac{\overline{MB}}{\overline{NB}} \right]$, но $\overline{MB} = -\overline{NB}$, поэтому $x = \ln \left[-\frac{\overline{MA}}{\overline{NA}} \right]$.

В прямоугольном треугольнике MTN отрезок AT есть биссектриса прямого угла MTN , так как пара AA' гармонически разделяет пару MN и, значит, пучок прямых TM, TN, TA, TA' — тоже гармонический и потому взаимно перпендикулярные прямые TA и TA' являются биссектрисами углов между соответственными прямыми. По свойству биссектрисы угла в треугольнике имеем:

$$-\frac{\overline{MA}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{MT}}{\overline{NT}} = \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \quad (\text{так как } \varphi \text{ есть внешний угол}$$

равнобедренного треугольника MBT , в котором $\angle TMB = \angle MTB$, но $\angle TMB + \angle MTB = \varphi)$. Итак, мы имеем:

$$x = \ln \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \text{ или } \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = e^x \text{ и, наконец, } \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = e^{-x}, \text{ т. е.}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\Pi(x)}{2} = e^{-x}.$$

Это и есть аналитическое выражение функции Лобачевского. Если x стремится к 0, то e^{-x} стремится к единице.

Но если $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = 1$, то $\frac{\varphi}{2} = 45^\circ$ и $\varphi = 90^\circ$, т. е. φ стремится к 90° . Если x стремится к бесконечности, то e^{-x} стремится к 0 и, значит, φ тоже стремится к 0.

Для дальнейшего изучения метрических отношений в гиперболической геометрии нам понадобятся специальные гиперболические функции, каждая из которых представляет собой комбинацию показательных функций e^x и e^{-x} .

Функция $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ называется гиперболическим синусом и обозначается символом $\text{sh } x$.

Функция $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ называется гиперболическим косинусом и обозначается символом $\text{ch } x$.

Функция $\text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ называется гиперболическим тангенсом.

Происхождение этих названий станет понятным, если припомним, что тригонометрические функции синус и косинус можно рассматривать как координаты точки единичной окружности, уравнение которой в декартовых координатах будет $x^2 + y^2 = 1$. Отсюда сразу получается формула: $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$.

Здесь α есть радианная мера угла, образуемого с осью Ox вектором, направленным в данную точку окружности. В то же время α есть площадь сектора той же окружности, если угол сектора равен 2α .

Гиперболические функции $\text{ch } \alpha$ и $\text{sh } \alpha$ можно также рассматривать как координаты точки равноугольной гиперболы, уравнение которой имеет вид $x^2 - y^2 = 1$ (рис. 145).

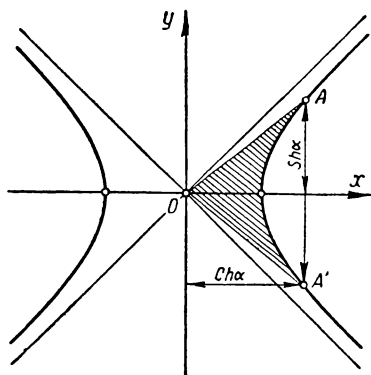


Рис. 145

Так как $\text{sh } \alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}$, $\text{ch } \alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}$, то получим:

$$\text{ch}^2 \alpha - \text{sh}^2 \alpha = \frac{e^{2\alpha} + 2 + e^{-2\alpha} - e^{2\alpha} + 2 - e^{2\alpha}}{4} = 1.$$

Итак, $\text{ch}^2 \alpha - \text{sh}^2 \alpha = 1$.

Аргумент α здесь представляет собой площадь гиперболического сектора AOA' (рис. 145).

Аналогия между тригонометрическими и гиперболическими функциями простирается и дальше.

Известно, что $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Для гиперболических функций можно доказать, что $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ch} x = 1$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1$. Это следует из того, что показательная функция e^x вычисляется при помощи ряда:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

откуда получается, что гиперболические функции можно вычислять при помощи рядов:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \\ \operatorname{sh} x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \end{aligned}$$

Отсюда мы видим, что при весьма малом x имеют место приближенные равенства: $\operatorname{ch} x \approx 1 + \frac{x^2}{2}$ и $\operatorname{sh} x \approx x$.

Дадим теперь выражение функции Лобачевского $\varphi = \Pi(x)$ через гиперболические функции. Заметим прежде всего, что все тригонометрические функции выражаются рационально через тангенс половины аргумента:

$$\sin \varphi = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}; \quad \cos \varphi = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}; \quad \operatorname{ctg} \varphi = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}.$$

Подставляя сюда найденное выше значение функции Лобачевского $\operatorname{tg} \frac{\Pi(x)}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = e^{-x}$, получим: $\sin \varphi = \frac{2e^{-x}}{1 + e^{-2x}}$; умножая числитель и знаменатель на e^x , найдем:

$$\sin \varphi = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\operatorname{ch} x}.$$

Таким же путем получим: $\operatorname{ctg} \varphi = \frac{1 - e^{-2x}}{2e^{-x}} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$. И, наконец, $\cos \varphi = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \operatorname{th} x$.

Итак, мы имеем зависимости:

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi &= \sin \Pi(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} & (1) \\ \operatorname{ctg} \varphi &= \operatorname{ctg} \Pi(x) = \operatorname{sh}(x) & (2) \\ \cos \varphi &= \cos \Pi(x) = \operatorname{th}(x) & (3) \end{aligned} \right\}$$

Для гиперболических функций составлены таблицы, подобные таблицам тригонометрических функций.

10.3. Функция Лобачевского дает возможность получить все формулы решения треугольников. Найдем сначала соотношения между элементами прямоугольного треугольника.

На рисунке 146 дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C , причем вершина A совпадает с центром абсолюта. Величины углов при вершинах A и B обозначены соответственно через α и β , меры длины отрезков \overline{BC} , \overline{CA} и \overline{AB} — через a , b и c . Проведя через точку A «прямую» $AP \parallel BC$, получим $\angle CAP = \Pi(b)$. Центр окружности BC обозначим через O , ее радиус — через r .

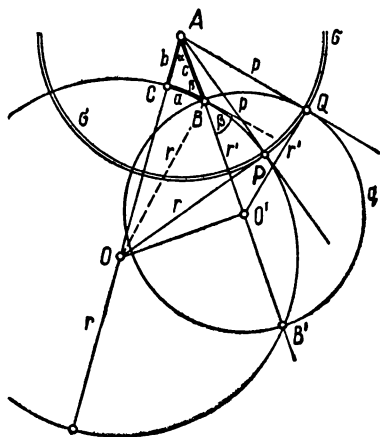


Рис. 146

Чтобы получить $\Pi(c)$, проведем «прямую» $q \perp c$ и через точку A «прямую» $AQ \parallel q$; $\angle BAQ = \Pi(c)$. Центр окружности q обозначим через O' , ее радиус — через r' .

Перейдем теперь к выводу основных формул.

1. Из прямоугольного треугольника APQ имеем: $\cos \Pi(b) = \frac{p}{AO}$ (здесь p — радиус абсолюта). Из прямоугольного треугольника AQO' получим: $\cos \Pi(c) = \frac{p}{AO'}$.

Деля почленно полученные равенства, найдем: $\frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(c)} =$

$$= \frac{\overline{AO'}}{\overline{AO}} = \cos \alpha \text{ (из прямоугольного треугольника } AOO').$$

Итак, $\cos \Pi(b) = \cos \Pi(c) \cos \alpha$. Но $\cos \Pi(b) = \text{th } b$; $\cos \Pi(c) = \text{th } c$ (по формуле 3 предыдущего пункта). Поэтому получим:

$$\text{th } b = \text{th } c \cdot \cos \alpha. \quad (1)$$

Меняя местами обозначения вершин A и B , мы тем же путем получим аналогичную формулу:

$$\text{th } a = \text{th } c \cdot \cos \beta. \quad (1')$$

2. Из треугольника AOO' имеем $\sin \alpha = \frac{\overline{OO'}}{\overline{AO}}$. Заметим далее, что $\angle \beta$, образованный касательной в точке B и хордой $\overline{BB'}$, измеряется половиной дуги BB' . Поэтому $\angle BOO' = \angle \beta$ и, значит, $\cos \beta = \frac{\overline{OO'}}{r}$.

Из треугольника AOP получим $\sin \Pi(b) = \frac{r}{\overline{AO}}$. Перемножая два последних равенства почленно, получим:

$$\cos \beta \cdot \sin \Pi(b) = \frac{\overline{OO'}}{r} \cdot \frac{r}{\overline{AO}} = \frac{\overline{OO'}}{\overline{AO}} = \sin \alpha. \quad \text{Итак,}$$

$$\sin \alpha = \cos \beta \cdot \sin \Pi(b).$$

Но по формуле (1) предыдущего пункта $\sin \Pi(b) = \frac{1}{\text{ch } b}$, следовательно,

$$\sin \alpha = \frac{\cos \beta}{\text{ch } b} \quad (2)$$

Опять меняя обозначения, найдем аналогично:

$$\sin \beta = \frac{\cos \alpha}{\text{ch } a}. \quad (2')$$

3. Из треугольника AOO' имеем: $\text{tg } \alpha = \frac{\overline{OO'}}{\overline{AO'}}$. Из треугольника BOO' находим: $\text{tg } \beta = \frac{r'}{\overline{OO'}}$. Перемножая почленно эти равенства, получим $\text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta = \frac{\overline{OO'}}{\overline{AO'}} \cdot \frac{r'}{\overline{OO'}} = \frac{r'}{\overline{AO'}} =$
 $= \sin \Pi(c) = \frac{1}{\text{ch } c}$. Отсюда получаем:

$$\text{ch } c = \text{ctg } \alpha \cdot \text{ctg } \beta. \quad (3)$$

Переменной обозначений A и B из этой формулы, очевидно, нельзя получить новую формулу.

4. Из треугольника AOP имеем: $\text{ctg } \Pi(b) = \frac{p}{r}$. Из треугольника $AO'Q$ имеем $\text{ctg } \Pi(c) = \frac{p}{r'}$. Деля почленно первое равенство на второе, находим:

$$\frac{\text{ctg } \Pi(b)}{\text{ctg } \Pi(c)} = \frac{r'}{r} = \sin \beta \text{ (из треугольника } BOO').$$

Но $\text{ctg } \Pi(b) = \text{sh } b$; $\text{ctg } \Pi(c) = \text{sh } c$.

Итак, мы получили:

$$\sin \beta = \frac{\text{sh } b}{\text{sh } c}. \quad (4)$$

Переменной обозначений получим:

$$\sin \alpha = \frac{\text{sh } a}{\text{sh } c}. \quad (4')$$

5. Из формул (2) и (2') получим:

$$\text{ch } a = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}; \quad \text{ch } b = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}.$$

Перемножая почленно эти равенства, получим $\text{ch } a \cdot \text{ch } b = \text{ctg } \alpha \cdot \text{ctg } \beta$. Но из формулы (3) имеем: $\text{ctg } \alpha \cdot \text{ctg } \beta = \text{ch } c$. Итак, находим:

$$\text{ch } c = \text{ch } a \cdot \text{ch } b. \quad (5)$$

6. Из формулы (4') имеем:

$$\text{sh } a = \sin \alpha \text{ sh } c.$$

Из формулы (2') имеем:

$$\text{ch } a = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}.$$

Почленным делением равенств получим:

$$\text{th } a = \text{tg } \alpha \cdot \text{sh } c \cdot \sin \beta. \text{ Но по формуле (4)}$$

$$\text{sh } c \cdot \sin \beta = \text{sh } b. \text{ Следовательно,}$$

$$\text{th } a = \text{tg } \alpha \text{ sh } b \quad (6)$$

и аналогично

$$\text{th } b = \text{tg } \beta \text{ sh } a. \quad (6')$$

10.4. Итак, мы получили десять формул, которыми исчерпывающим образом определяются зависимости между пятью элементами прямоугольного треугольника:

$$\operatorname{th} b = \operatorname{th} c \cos \alpha \quad (1), \quad \operatorname{th} a = \operatorname{th} c \cos \beta \quad (1')$$

$$\sin \alpha = \frac{\cos \beta}{\operatorname{ch} b} \quad (2), \quad \sin \beta = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{ch} a} \quad (2')$$

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \quad (3).$$

$$\sin \beta = \frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{sh} c} \quad (4), \quad \sin \alpha = \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{sh} c} \quad (4')$$

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b \quad (5),$$

$$\operatorname{th} a = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{sh} b \quad (6), \quad \operatorname{th} b = \operatorname{tg} \beta \operatorname{sh} a. \quad (6')$$

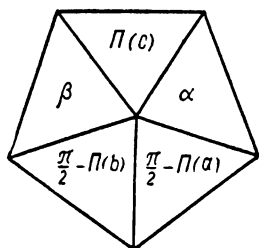


Рис. 147

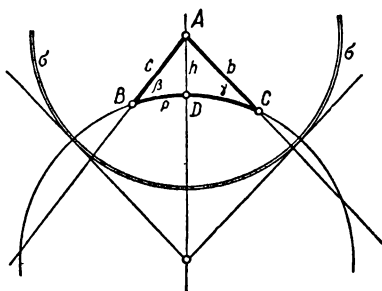


Рис. 148

Для запоминания этих десяти формул можно пользоваться следующим правилом. Расположим последовательно величины:

$$\frac{\pi}{2} - \Pi(b); \quad \beta; \quad \Pi(c); \quad \alpha; \quad \frac{\pi}{2} - \Pi(a)$$

в пяти секторах правильного пятиугольника (рис. 147).

Тогда все формулы мы получим по правилу:

Синус каждой величины равен произведению тангенсов двух смежных величин и также — произведению косинусов двух несмежных величин.

Например, $\sin \alpha = \operatorname{tg} \Pi(c) \cdot \operatorname{ctg} \Pi(a)$, но $\operatorname{tg} \Pi(c) = \frac{1}{\operatorname{ctg} \Pi(c)} = \frac{1}{\operatorname{sh} c}$, $\operatorname{ctg} \Pi(a) = \operatorname{sh} a$. Итак, $\sin \alpha = \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{sh} c}$ (4'). Далее $\sin \alpha = \cos \beta \sin \Pi(b)$, но $\sin \Pi(b) = \frac{1}{\operatorname{ch} b}$. Значит, $\sin \alpha = \frac{\cos \beta}{\operatorname{ch} b}$ (2)

Рассмотрим теперь произвольный треугольник ABC (рис 148), в котором $(\overline{BC}) = a$, $(\overline{CA}) = b$, $(\overline{AB}) = c$, $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, $(\overline{AD}) = h$, $(\overline{BD}) = p$, $(\overline{CD}) = a - p$. Из прямоугольного треугольника ABD получим: $\text{ch } c = \text{ch } h \cdot \text{ch } p$ (формула 5) и $\text{th } p = \text{th } c \cos \beta$ (формула 1).

Из прямоугольного треугольника ACD находим:

$$\text{ch } b = \text{ch } h \text{ch } (a - p) \quad (\text{формула 5}).$$

Но $\text{ch } (a - p) = \text{ch } a \text{ch } p - \text{sh } a \text{sh } p$ — эту формулу легко проверить, заменив в правой части равенства гиперболические функции показательными. Подставляя значение $\text{ch } (a - p)$ по этой формуле, получим:

$$\text{ch } b = \text{ch } h \text{ch } a \text{ch } p - \text{ch } h \text{sh } a \text{sh } p, \text{ но } \text{sh } p = \text{th } p \text{ch } p.$$

Заменяя $\text{sh } p$ и подставляя $\text{ch } h \text{ch } p = \text{ch } c$, находим $\text{ch } b = \text{ch } c \text{ch } a - \text{sh } a \text{ch } h \text{ch } p \text{tg } p = \text{ch } c \text{ch } a - \text{sh } a \text{ch } c \text{th } p$. Подставляя, наконец, вместо $\text{th } p$ произведение $\text{th } c \cos \beta$ и принимая во внимание, что $\text{th } c \cdot \text{ch } c = \text{sh } c$, получим:

$$\text{ch } b = \text{ch } c \text{ch } a - \text{sh } c \text{sh } a \cos \beta.$$

Этой формулой выражается теорема косинусов гиперболической тригонометрии. Изменяя порядок букв, получим две аналогичные формулы:

$$\text{ch } c = \text{ch } a \text{ch } b - \text{sh } a \text{sh } b \cos \gamma,$$

$$\text{ch } a = \text{ch } b \text{ch } c - \text{sh } b \text{sh } c \cos \alpha.$$

Далее из треугольника ABD получим по формуле 4: $\sin \beta = \frac{\text{sh } h}{\text{sh } b}$, а из треугольника ACD по той же формуле: $\sin \gamma = \frac{\text{sh } h}{\text{sh } c}$.

Деля почленно оба равенства, находим:

$$\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{\text{sh } b}{\text{sh } c} \quad \text{или} \quad \frac{\text{sh } b}{\sin \beta} = \frac{\text{sh } c}{\sin \gamma}.$$

$$\text{И, значит, вообще} \quad \frac{\text{sh } a}{\sin \alpha} = \frac{\text{sh } b}{\sin \beta} = \frac{\text{sh } c}{\sin \gamma}.$$

Этой формулой выражается теорема синусов гиперболической геометрии.

Подобно тому как в тригонометрии на евклидовой плоскости теорема косинусов и теорема синусов дают соотно-

шения, достаточные для вывода всех формул решения треугольников, в гиперболической геометрии аналогичные теоремы дают все, что нужно для решения треугольников на гиперболической плоскости.

Применим полученные выводы к вычислению длины окружности, мера радиуса которой равна r (рис. 149). Впишем в окружность правильный n -угольник и обозначим через a_n меру половины его стороны; тогда периметр многоугольника будет равен: $p_n = 2na_n$.

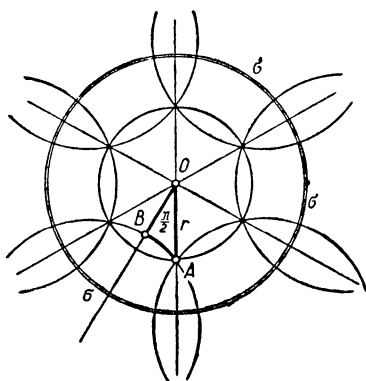


Рис. 149

Значение a_n вычислим из прямоугольного треугольника AOB , в котором $\angle AOB = \frac{\pi}{n}$, гипотенуза $(AO) = r$.

Из формулы (4) получим:

$$\operatorname{sh} a_n = \operatorname{sh} r \sin \frac{\pi}{n}.$$

Умножим почленно это равенство на равенство $p_n = 2na_n$ и получим: $p_n \operatorname{sh} a_n = 2na_n \operatorname{sh} r \sin \frac{\pi}{n}$. Произведем тождественные преобразования:

$$p_n \frac{\operatorname{sh} a_n}{a_n} = 2\pi \operatorname{sh} r \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}.$$

Перейдем к пределу в обеих частях равенства при $n \rightarrow \infty$, имея в виду, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = C$ (мера длины окружности), $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} = 0$ и, значит,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sh} a_n}{a_n} = 1; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 1 \text{ и окончательно}$$

$$C = 2\pi \operatorname{sh} r.$$

10.5. Рассмотрим теперь, как определяется мера площади в гиперболической геометрии. Как уже указывалось ранее, мерой площади мы будем называть действительное число, которое мы отнесем к данной фигуре и которое удовлетворяет условиям:

1. Равные фигуры имеют равные меры площади.

2. Если фигура состоит из нескольких фигур, то мера ее площади равна сумме мер составляющих ее частей.

Ввиду того, что понятие площади тесно связано с понятием конгруэнтности, необходимо доказать еще одну теорему о равенстве треугольников, которая не имеет места в евклидовой геометрии.

Т₁. Два треугольника равны, если три угла одного соответственно равны трем углам другого.

Пусть даны два треугольника ABC и $A'B'C'$, в которых $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$ и $\angle C = \angle C'$. При помощи движения перенесем треугольник $A'B'C'$ на треугольник ABC так, чтобы угол A' совпал с углом A . Покажем, что при этом точка B' совпадет с B и C' с C . Допустим обратное, положим, что точки B' и C' займут положение B'' и C'' , указанное на рисунке 150, а. Но тогда мы получим, что в треугольнике MBB'' внешний угол при вершине B больше внутреннего при вершине B'' , но $\angle B$ должен быть равен $\angle B''$. По той же причине не может получиться положения, указанного на рисунке 150, б. Положим, наконец, что точки B'' и C'' заняли положение, указанное на рисунке 150, с. Тогда в четырехугольнике $BB''C''C$ углы при вершинах B'' и C'' равны $180^\circ - \angle B'' = 180^\circ - \angle B$ и $180^\circ - \angle C'' = 180^\circ - \angle C$, но это значит, что сумма внутренних углов в этом четырехугольнике равна 360° . Поэтому в каждом из двух треугольников, на которые четырехугольник $BB''C''C$ делится диагональю BC'' , сумма внутренних углов равна 180° , т. е. имеет место геометрия Евклида. Но ведь мы имеем дело с треугольниками

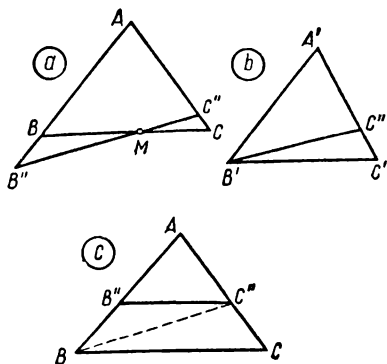


Рис. 150

гиперболической плоскости, в которой сумма внутренних углов треугольника меньше 180° . Полученное противоречие приводит к выводу, что $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

Отсюда, между прочим, следует, что в гиперболической геометрии не может быть двух треугольников с равными углами и неравными сторонами, т. е. подобных фигур в гиперболическом пространстве нет.

Так как в гиперболической геометрии треугольник вполне определяется тремя своими углами, то к понятию меры площади мы можем подойти через понятие угла. Мы знаем,

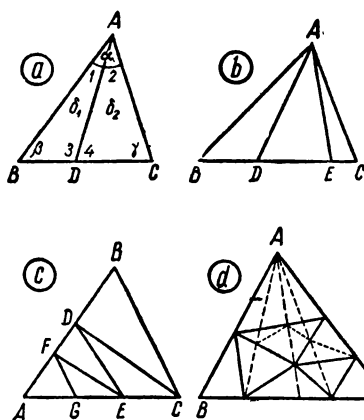


Рис. 151

что в гиперболическом треугольнике сумма внутренних углов не постоянна и меньше π . Разность между числом π и суммой внутренних углов треугольника называется дефектом треугольника. Будем обозначать дефект треугольника буквой δ :

$$\delta = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Если данный треугольник ABC , то будем также писать:

$$\delta_{ABC} = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Непосредственно из доказанной теоремы следует:

С₁. Равные треугольники имеют и равные дефекты.

Далее имеем:

Т₂. Если треугольник состоит из нескольких треугольников, то его дефект равен сумме дефектов составляющих треугольников.

На рисунке 151, а треугольник ABC состоит из треугольников ABD и ACD , дефекты которых обозначим соответственно через δ , δ_1 и δ_2 . Имеем: $\delta = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$; $\delta_1 = \pi - (\beta + \angle 1 + \angle 3)$; $\delta_2 = \pi - (\gamma + \angle 2 + \angle 4)$. Складывая почленно два последних равенства, получим: $\delta_1 + \delta_2 = 2\pi - (\beta + \gamma + \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4) = 2\pi - (\beta + \gamma + \alpha + \pi) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma) = \delta$.

Итак, для этого случая теорема верна: $\delta = \delta_1 + \delta_2$. Пусть теперь $\triangle ABC$ разбит на треугольники ABD , ADE ,

AEC (рис. 151, *b*), Тогда получим: $\delta_{ABC} = \delta_{ABD} + \delta_{ADC} = \delta_{ABD} + \delta_{ADE} + \delta_{AEC}$, т. е. теорема справедлива при разбиении треугольника прямыми, идущими из данной вершины.

Положим теперь, что вершины составляющих треугольников лежат на двух сторонах данного (рис. 151, *c*). Тогда получим:

$$\delta_{ABC} = \delta_{ACD} + \delta_{BCD} = \delta_{ADE} + \delta_{CDE} + \delta_{BCD} = \delta_{AEF} + \delta_{DEF} + \delta_{CDE} + \delta_{BCD} = \delta_{AFG} + \delta_{EFG} + \delta_{DEF} + \delta_{CDE} + \delta_{BCD}.$$

Значит, и для этого случая теорема тоже верна.

Рассмотрим, наконец, случай, когда вершины составляющих треугольников лежат и на всех сторонах и внутри треугольника (рис. 151, *d*). Назовем эти треугольники треугольниками первого разбиения. Разобьем теперь наш треугольник штриховыми линиями, идущими из одной и той же вершины через внутренние вершины и вершины на противоположной стороне, на треугольники второго разбиения. В пересечении с линиями первого разбиения мы получим треугольники и четырехугольники, причем эти последние пунктирными диагоналями разобьем на треугольники и получим треугольники третьего разбиения. Как уже было показано, дефект данного треугольника равен сумме дефектов треугольников второго разбиения. В то же время дефект каждого треугольника второго разбиения равен сумме дефектов треугольников третьего разбиения. Но той же самой сумме равна и сумма дефектов треугольников первого разбиения. Значит, и в этом общем случае дефект треугольника равен сумме дефектов составляющих.

Д₁. Дефект многоугольника есть сумма дефектов треугольников, на которые можно разбить данный многоугольник.

Для того чтобы это определение имело смысл, необходимо показать, что дефект многоугольника не зависит от способа разбиения его на треугольники. На рисунке 152 показан многоугольник, который сплошными линиями разбит на треугольники первого разбиения, а штриховыми — на треугольники второго разбиения. Пересечение тех и других линий дает, как в предыдущей теореме, треугольники третьего разбиения. Суммы дефектов треугольников

как первого, так и второго разбиения равны сумме дефектов треугольников третьего разбиения и, значит, равны между собой.

Отсюда сразу следует:

С₂. Если многоугольник состоит из нескольких многоугольников, то его дефект равен сумме дефектов составляющих многоугольников.

Мы видим, что дефект многоугольника есть действительное число, удовлетворяющее всем тем условиям, которым должна удовлетворять мера площади. Поэтому имеем определение:

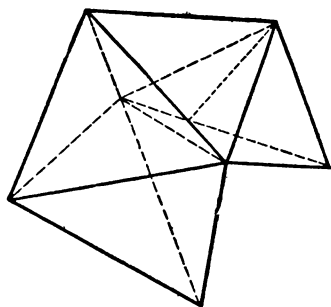


Рис. 152

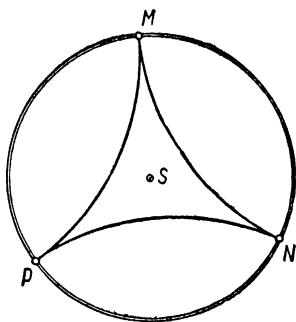


Рис. 153

D₂. Мерой площади многоугольника в гиперболическом пространстве является действительное число, пропорциональное дефекту многоугольника.

В качестве коэффициента пропорциональности обычно берут k^2 — квадрат коэффициента k в равенстве, определяющем меру длины отрезка. Так как мы приняли $k = 1$, то у нас эта мера численно равна дефекту. Итак, в гиперболической геометрии измерение площадей приводится к измерению углов.

При измерении площадей криволинейной фигуры, например площади круга, можно пользоваться последовательностями вписанных многоугольников и предельным переходом, как это делается и в евклидовой геометрии.

Обратим внимание на одно, весьма интересное свойство площадей гиперболического пространства. В то время как

в евклидовой плоскости при одновременном увеличении всех сторон треугольника площадь его неограниченно возрастает, в гиперболической плоскости эта площадь ограничена и не может быть больше π (при условии, что $k = 1$). На рисунке 153 показан предельный треугольник с бесконечно большими сторонами, попарно параллельными между собой. Сумма внутренних углов его, очевидно, равна нулю и, значит, его дефект, т. е. площадь, равен π — конечному числу.

Во всяком треугольнике с конечными сторонами сумма внутренних углов меньше нуля и, значит, площадь меньше π .

10. 6. Рассмотрим некоторые особенности гиперболической геометрии в трехмерном пространстве.

Две различные прямые в пространстве могут или принадлежать или не принадлежать одной и той же плоскости. В первом случае они будут либо пересекающимися, либо параллельными, либо расходящимися. Во втором случае они будут скрещивающимися.

Все прямые пространства, проходящие через одну и ту же точку, образуют эллиптическую связку прямых. В нашем отображении это будет эллиптическая связка окружностей, проходящих через две, взаимные в инверсии относительно абсолюта точки.

Все прямые, параллельные одной и той же прямой, образуют параболическую связку прямых. В гиперболической сети сфер такой связкой является параболическая связка окружностей, ортогональных к абсолюту, абсолюту принадлежит общая точка касания этих окружностей.

Все прямые, перпендикулярные к одной и той же плоскости, образуют гиперболическую связку прямых. В гиперболической сети такой связкой является совокупность всех окружностей, одновременно ортогональных к абсолюту и к одной из сфер сети.

Подобно тому как три вида пучков прямых в гиперболической плоскости дали основу для определения трех главных видов кривых, в гиперболическом пространстве три вида связок позволяют определить три вида важнейших кривых поверхностей.

D₁. *Геометрическое место точек, симметричных с данной точкой относительно всех прямых эллиптической связки, называется сферой. Центр связки называется центром сферы.*

Геометрическое место точек, симметричных с данной точкой относительно всех прямых параболической связки, называется *орисферой*.

Геометрическое место точек, симметричных с данной точкой относительно всех прямых гиперболической связки, называется *эвидистантной поверхностью*.

Во всех трех случаях прямые связки называются *диаметральными*, а каждая плоскость, проходящая

через две диаметрально прямые, — *диаметральной плоскостью*.

Из этого определения получаем:

С₁. Сфера есть геометрическое место точек, отстоящих на одно и то же расстояние от центра.

С₂. Эвидистантная поверхность есть геометрическое место точек, отстоящих на одно и то же расстояние от данной плоскости.

С₃. Каждую из трех поверхностей — сферу, орисферу и эвидистантную можно рассматривать как поверхность вращения соответствующей кривой, т. е. окружности, орицикла или эвидистанты около одной из своих диаметральных прямых.

Например, на рисунке 154 орисфера получена вращением орицикла около своей диаметральной прямой *ST*.

С₄. При пересечении орисферы любой ее диаметральной плоскостью получается орицикл.

Действительно, в пересечении орисферы со сферой сети, проходящей через точку касания орисферы с абсолютом, получается окружность, касающаяся абсолюта в той же точке, т. е. орицикл.

Наиболее важное свойство орисферы дано в следующей теореме.

Т₁. Если орисферу принять за плоскость, а проходящие по ней орициклы — за прямые, то на орисфере получится евклидова планиметрия.

Нетрудно убедиться в том, что эта планиметрия совершенно тождественна с той реализацией евклидовой

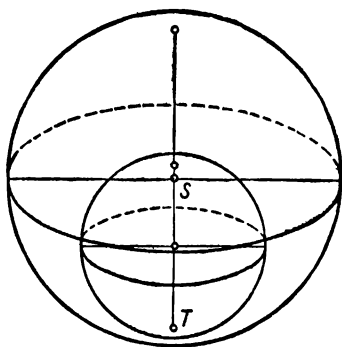


Рис. 154

планиметрии, которую мы подробно изложили в главе 8. Действительно, в данном случае «прямыми» служат все орициклы, т. е. все окружности параболической связки, проходящие через одну и ту же точку — точку касания орисферы с абсолютном.

Вместе с тем эту точку мы считаем не принадлежащей к нашей плоскости. Словом, мы получили все те условия, которыми пользовались при построении евклидовой планиметрии в параболической связке окружностей.

10. 7. Во всем предыдущем изложении основ гиперболической геометрии мы систематически пользовались ее наглядной реализацией в гиперболической сети сфер и в гиперболической связке окружностей.

При доказательстве теорем и при выводе формул мы постоянно обращались к свойствам пучков и связок окружностей, к инверсии и подобию и т. д., словом, к предложениям, установленным и доказанным средствами евклидовой геометрии.

Несравненно более сложным и трудным путем шли первооткрыватели гиперболической геометрии — Лобачевский, Больяи, Гаусс. В их распоряжении имелась лишь совокупность аксиом и теорем абсолютной геометрии и аксиома-гипотеза о существовании, по крайней мере, двух прямых, проходящих через данную точку и не пересекающих данную прямую. Вместе с тем эта гипотеза шла вразрез с прочно укоренившимися представлениями о структуре пространства.

Поэтому все дальнейшее изложение гиперболической геометрии приходилось строить, опираясь на чистую логику, и лишь иногда прибегать к чертежам-картинкам, очень плохо отображавшим подлинные фигуры.

Тем более надо поражаться гениальной смелости мысли основоположников неевклидовой геометрии, открывших существование таких объектов, как орицикл, орисфера, эквидистанта и эквидистантная поверхность, треугольник с тремя нулевыми углами и т. д. Была найдена и теорема предыдущего пункта о том, что на орисфере имеет место геометрия Евклида, что было использовано Лобачевским для вывода формул гиперболической тригонометрии.

Чтобы показать, хотя бы на одном примере, насколько сложные получались доказательства, приведем доказательство T_2 из п. 9. 6.

Существует единственная прямая, перпендикулярная к одной из сторон острого угла и параллельная другой его стороне.

Пусть дан острый угол со сторонами a и b и вершиной O (рис. 155). Через точку A на прямой a проведем перпендикуляр AB к прямой b . Обозначим через δ дефект треугольника OAB . Найдем точку B_1 , симметричную с O относительно AB , и соединим A с B_1 .

Очевидно, $\delta_{AOB_1} = 2\delta$. Проведем через B_1 перпендикуляр к прямой b и допустим, что он пересекает прямую a в точке A_1 . Найдем точку B_2 , симметричную с O относительно A_1B_1 , и соединим B_2 с A_1 . $\delta_{OA_1B_1} > \delta_{AOB_1}$, так как $\triangle AOB_1$ есть часть треугольника OA_1B_1 . Поэтому имеем:

$$\delta_{OA_1B_1} > 4\delta.$$

Если перпендикуляр, проведенный из точки B_2 к прямой b , встретит прямую a в точке A_2 , то, повторив такое же построение,

получим треугольник OA_2B_3 , для которого $\delta_{OA_2B_3} > 8\delta$.

Продолжая дальше это построение и допуская, что перпендикуляры, проведенные через точки B_4, B_5, \dots к прямой b , будут пересекать прямую a , мы получим ряд треугольников $OA_3B_4, OA_4B_5, \dots, OA_{n-1}B_n, \dots$, дефекты которых будут неограниченно возрастать в силу неравенства:

$$\delta_{OA_{n-1}B_n} > 2^n \delta.$$

Однако нами было доказано, что дефект треугольника не может превзойти π . Полученное противоречие показывает, что число перпендикуляров, проведенных через точки B, B_1, B_2, B_3, \dots к прямой b и пересекающих прямую a , должно быть конечным.

Итак, на луче OB есть точки, в которых перпендикуляры к прямой b пересекают прямую a , а также точки, в которых эти перпендикуляры не пересекают a . Далее при-

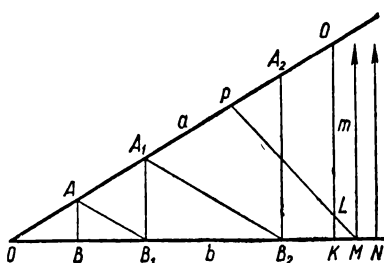


Рис. 155

ходится применять принцип непрерывности в наиболее общей форме, именно в виде аксиомы Дедекинда:

Если все точки прямой можно разделить на два класса, удовлетворяющие условиям: 1) *каждый класс содержит точки*; 2) *все точки первого класса предшествуют точкам второго класса*, — то существует единственная точка, следующая за всеми точками первого класса и предшествующая всем точкам второго класса¹.

В данном случае к первому классу отнесем все точки (и все им предшествующие) прямой b , в которых перпендикуляры, восставленные к этой прямой, пересекают прямую a , а ко второму классу — все точки, перпендикуляры которых не пересекают a . Все точки первого класса лежат левее всех точек второго класса. Следовательно, существует пограничная точка M , отделяющая эти классы друг от друга. Перпендикуляр m , проведенный через точку M к прямой b , не может пересекать a , так как в противном случае, правее точки пересечения на прямой a можно было бы взять точку и из нее провести перпендикуляр к b и мы получили бы на прямой b точку первого класса правее M , чего быть не может, в силу определения M . Докажем, что $m \parallel a$.

Для этого воспользуемся основным признаком параллельности: всякая прямая, проходящая через точку M внутри угла параллельности OMt , должна пересекать a . Проведем такую прямую и возьмем на ней точку L . Перпендикуляр LK , проведенный из L к прямой b , лежит левее m и потому пересекает прямую a в точке Q . Прямая ML пересекает сторону треугольника OKQ в точке L и потому должна пересечь и еще одну сторону этого треугольника. Так как сторону OK она пересекает на ее продолжении в точке M , то она должна пересечь сторону OQ , т. е. прямую a . Итак $m \parallel a$.

Подобными же, весьма пространными рассуждениями с кропотливым разбором всех возможных случаев приходится доказывать и остальные предложения гиперболической геометрии, если развивать их в чисто логическом плане.

¹ Заметим, что, приняв аксиому Дедекинда, мы можем доказать аксиомы Архимеда и Кантора.

10. 8. Сложности доказательств теорем гиперболической геометрии, парадоксальность многих результатов, а также отсутствие наглядности заставили многих ученых первой половины прошлого столетия усомниться в правильности полученных выводов. Это станет тем более понятным, если припомнить, что некоторые предшественники творцов неевклидовой геометрии шли этим же путем, т. е. исходя из аксиомы, противоречащей аксиоме Евклида, старались получить из нее возможно больше следствий, в надежде, что в этих следствиях обнаружится внутреннее противоречие, которое и докажет несостоятельность принятой гипотезы. То обстоятельство, что ни предшественники Лобачевского и Больяи, ни сами творцы неевклидовой геометрии к такому противоречию не пришли, еще не доказывает, что эта геометрия не противоречива, так как у нас нет гарантии, что при построении достаточно далеко идущих выводов мы в конце концов не натолкнемся на противоречие. Некоторым доводом в защиту правильности выводов гиперболической геометрии явился тот факт, что если в гиперболическом пространстве выделить весьма малую область, то в этой области с достаточной степенью точности будет иметь место геометрия Евклида.

Приведем примеры. Мы знаем, что в гиперболической геометрии гипотенуза c и катеты a и b прямоугольного треугольника связаны зависимостью $\text{ch } c = \text{ch } a \cdot \text{ch } b$.

Положим, что a , b и c весьма малы. Тогда имеет место приближенное равенство:

$$\text{ch } x \approx 1 + \frac{x^2}{2}.$$

Заменяя a , b и c их приближенными значениями, получим:

$$1 + \frac{c^2}{2} \approx \left(1 + \frac{a^2}{2}\right) \left(1 + \frac{b^2}{2}\right), \text{ или}$$

$$1 + \frac{c^2}{2} \approx 1 + \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \frac{a^2 b^2}{4}, \text{ т. е. } c^2 \approx a^2 + b^2 + \frac{a^2 b^2}{2}.$$

Замечая, что при весьма малых a^2 и b^2 дробь $\frac{a^2 b^2}{2}$ будет более высокого порядка малости (например, если $a^2 < 0,01$, $b^2 < 0,01$, то $a^2 b^2 < 0,0001$) и потому этот член в приближенном равенстве можно отбросить, мы получим: $c^2 = a^2 + b^2$, т. е. теорему Пифагора.

Возьмем еще теоремы косинусов и синусов:

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \cos \alpha \text{ и}$$

$$\frac{\operatorname{sh} a}{\sin \alpha} = \frac{\operatorname{sh} b}{\sin \beta} = \frac{\operatorname{sh} c}{\sin \gamma} \text{ и, заменяя } \operatorname{ch} \text{ и } \operatorname{sh} \text{ их приближенными}$$

значениями по формуле $\operatorname{sh} x \approx x$, $\operatorname{ch} x \approx 1 + \frac{x^2}{2}$, получим:

$$1 + \frac{c^2}{2} \approx \left(1 + \frac{a^2}{2}\right) \left(1 + \frac{b^2}{2}\right) - ab \cos \alpha. \text{ Отбрасывая члены}$$

более высокого порядка малости, получим: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$, т. е. теорему косинусов обычной тригонометрии.

$$\text{Для второй теоремы получим сразу: } \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma},$$

т. е. известную теорему синусов.

Мы видим, что в малых областях гиперболического пространства применима евклидова геометрия. Однако это еще не является гарантией непротиворечивости гиперболической геометрии в целом.

Окончательно проблема непротиворечивости гиперболической геометрии была решена тогда, когда были построены системы конкретных геометрических объектов, соотношения между которыми отображают всю совокупность аксиом гиперболической геометрии. В нашем изложении такой системой явилась гиперболическая сеть сфер и окружностей. Мы убедились в том, что полученная нами система «точек», «прямых» и «плоскостей» удовлетворяет всем предложениям абсолютной геометрии, на базе которых строится и вся евклидова геометрия.

Но как только мы поставили вопрос о параллельности, сейчас же выяснилось, что в нашем пространстве евклидова аксиома параллельности не применима, и, значит, эта аксиома *логически никак не связана с системой аксиом абсолютной геометрии и этим раз и навсегда доказана бесплодность попыток «доказательства» 5-го постулата Евклида.*

Однако самым важным выводом из нашего изложения является то, что *всякое противоречие в системе гиперболической геометрии сейчас же обнаружит противоречие и в системе геометрии Евклида.*

К сожалению, именно это обстоятельство упускают из вида те, кто еще и в наше время пытается «доказать» 5-й постулат или «опровергнуть» то или иное предложение неевклидовой геометрии.

В самом деле, в нашем изложении мы все доказательства предложений гиперболической геометрии проводили, обращаясь к свойству пучков и связок, к инверсии к другим предложениям евклидовой геометрии.

Если бы у нас возникло сомнение в верности того или иного предложения гиперболической геометрии, то тем самым мы подвергли бы сомнению и соответствующее предложение евклидовой геометрии. Приведем примеры. Допустим, что не верна основная аксиома: *через данную точку можно провести несколько прямых, не пересекающих данную прямую*.

Если эта аксиома не верна, то это значит, что в гиперболической связке окружностей через данную точку нельзя провести несколько окружностей связки, не пересекающих данную окружность. Но это, очевидно, не верно, что и подтверждается построением на рисунке 128.

Если мы усомнимся в существовании предельного треугольника с нулевыми углами, то это значит, что мы не допускаем возможности построения трех окружностей, ортогональных к данной и попарно касающихся друг друга. Но стоит лишь обратиться к рисунку 153, чтобы удостовериться в обратном.

Словом, гиперболическая и евклидова геометрия связаны друг с другом столь прочными логическими связями, что малейший дефект, обнаруженный в одной системе, неизбежно вызвал бы соответствующий дефект в другой. Если бы мы, например, допустили, что в гиперболической плоскости из внешней точки можно провести к прямой два перпендикуляра, то пришлось бы допустить, что через данную точку к окружности гиперболической связки можно провести две ортогональные окружности той же связки. Но этого в евклидовой геометрии сделать нельзя, и этим доказана единственность перпендикуляра к прямой в данной точке в гиперболической плоскости.

Таким образом, непротиворечивость гиперболической геометрии есть следствие непротиворечивости евклидовой геометрии. Что же касается евклидовой геометрии, то в аналитической геометрии мы имеем изоморфную систему арифметических объектов, закономерности которой отображают пространственные соотношения на взаимоотношения числовой природы. Действительно, в аналитической геометрии на плоскости мы называем «точкой» два действительных числа $(x; y)$, взятых в определенном порядке. «Прямой»

мы называем множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению первой степени $ax + by + c = 0$, «окружностью» — множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = r^2$. Далее показывается, что соотношения между этими образами изоморфны предложениям планиметрии Евклида. Итак, геометрия Евклида столь же непротиворечива, как и арифметика.

Упражнения

1. На гиперболической плоскости построить равносторонний треугольник, все углы которого равны 45° . Чему равна площадь этого треугольника?

2. Доказать, что на гиперболической плоскости можно построить четырехугольник, который нельзя поместить внутри треугольника.

3. Доказать, что в гиперболическом пространстве через данную точку к данной плоскости можно провести один и только один перпендикуляр. Пересечение этого перпендикуляра с данной плоскостью называется *проекцией точки на эту плоскость*.

4. Доказать, что в гиперболическом пространстве геометрическим местом проекций всех точек прямой на данную плоскость есть тоже прямая — *проекция данной прямой*.

Определение. Если прямая пересекает свою проекцию на плоскость, то она пересекает плоскость.

Если прямая параллельна своей проекции на плоскость, то она параллельна плоскости.

Если прямая расходится со своей проекцией на плоскость, то она является *расходящейся с плоскостью*.

5. Доказать, что если прямая параллельна какой-нибудь прямой на плоскости, то она параллельна и самой плоскости.

6. Доказать, что если прямая расходится с плоскостью, то существует единственный общий перпендикуляр к прямой и к плоскости. Расстояние от прямой до плоскости неограниченно увеличивается по мере удаления от перпендикуляра.

7. Доказать, что если прямая расходится с какой-нибудь прямой, принадлежащей плоскости, то она расходится и с самой плоскостью.

8. Доказать, что для каждых двух плоскостей гиперболического пространства существует третья плоскость, перпендикулярная к обоим данным плоскостям.

Определение. Если при пересечении двух данных плоскостей плоскостью, перпендикулярной к ним обеим, линии пересечения пересекаются, то плоскости называются *пересекающимися*. Если эти линии параллельны, то плоскости называются *параллельными*. Если эти линии расходятся, то плоскости называются *расходящимися*.

9. Доказать, что через прямую, параллельную плоскости, проходит одна и только одна плоскость, параллельная данной плоскости.

10. Доказать, что для двух расходящихся плоскостей существует один и только один общий перпендикуляр. Расстояния между пло-

скостями неограниченно увеличиваются по мере удаления от этого перпендикуляра.

11. Доказать, что диаметральной плоскость эквидистантной поверхности пересекает эту поверхность по эквидистанте.

12. Доказать, что если принять эквидистантную поверхность за плоскость, а проходящие по ней эквидистанты — за прямые, то на этой поверхности осуществляется гиперболическая планиметрия.

Глава 11

ОСУЩЕСТВЛЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ РИМАНА В ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СЕТИ СФЕР

11. 1. В предыдущих главах мы рассмотрели осуществление геометрии Евклида в параболической сети сфер и геометрии Лобачевского — Больяи — в гиперболической сети сфер. Естественно возникает вопрос, какая геометрия получится, если мы аналогичным образом рассмотрим эллиптическую сеть сфер. Оказывается, что в эллиптической сети сфер осуществляется эллиптическая геометрия Римана. Свое название эта геометрия получила от имени выдающегося германского математика Бернгарда Римана (*Bernhard Riemann*, 1826—1866), который в своем знаменитом мемуаре «О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии» (1854 г.) наметил обширный план построения целого ряда геометрических систем, пространства которых в весьма малых областях приближенно отображают пространство Евклида. Одним из наиболее простых представителей таких пространств и является эллиптическое пространство, с некоторыми свойствами которого мы познакомимся в настоящей главе. Как мы увидим позднее, аксиоматика эллиптического пространства еще дальше отходит от аксиоматики евклидова пространства, чем аксиоматика пространства гиперболического. Этим обуславливаются и дальнейшие, более глубокие отличия эллиптической геометрии от обеих ранее изученных геометрий. В эллиптической геометрии совсем нет параллельности: две прямые одной и той же плоскости всегда пересекаются. В силу этого пересекаются и два перпендикуляра к одной и той же прямой и, значит, сумма внутренних углов треугольника больше 180° ; прямая линия замкнута и имеет конечную длину и т. д.

Итак, рассмотрим эллиптическую сеть сфер с радикальным центром S и степенью — p^2 . «Точкой» эллиптического

пространства назовем п а р у т о ч е к, взаимных в эллиптической инверсии с центром S и степенью $-p^2$. «Прямой» назовем всякую окружность, относительно которой точка S имеет степень $-p^2$ (очевидно, точка S должна лежать в плоскости этой окружности). Наконец, «плоскостью» эллиптического пространства назовем всякую сферу, относительно которой точка S имеет степень $-p^2$, т. е. любую сферу нашей сети.

Совершенно так же, как мы это делали при построении гиперболического пространства, мы можем убедиться в применимости в эллиптическом пространстве всех аксиом сочетания.

A_1^1 . Существует единственная прямая, проходящая через две данные точки.

Если две точки д а н ы, то это значит, что мы располагаем двумя парами взаимных в инверсии точек. Три из этих точек определяют единственную окружность, которая в силу свойств инверсии проходит и через четвертую точку.

A_2^1 . На каждой прямой существуют по крайней мере две точки. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной и той же прямой.

Эта аксиома проверяется совершенно так же, как это делалось в предыдущих главах.

A_3^1 . Существует единственная плоскость, проходящая через три точки, не лежащие на одной и той же прямой.

В эллиптической сети трем данным точкам соответствуют три пары взаимных в инверсии точек, не принадлежащих одной и той же окружности сети. Если взять одну из этих пар и по одной точке от каждой из остальных пар, то через эти четыре точки проходит единственная сфера сети. Так как инверсия относительно радикального центра сети преобразует эту сферу в самое себя, то и оставшиеся две точки будут принадлежать той же сфере. Столь же просто проверяются и остальные аксиомы сочетания. Поэтому мы только напомним о них, а на проверке останавливаться не будем.

A_4^1 . Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и все точки этой прямой принадлежат той же плоскости.

A_5^1 . Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют по крайней мере еще одну общую точку.

A_6^1 . Существуют четыре точки, не принадлежащие одной и той же плоскости.

Итак, мы видим, что совокупность этих шести аксиом сочетания остается одной и той же во всех трех геометриях.

11. 2. Более детальное изучение геометрии эллиптического пространства удобнее всего осуществить, рассматривая эллиптическую плоскость, так как ее можно наглядно изобразить на чертеже.

Эллиптической «плоскостью» является любая сфера эллиптической сети. Однако для наших целей удобнее всего взять диаметральною сферу сети, центр которой совпадает с радикальным центром S , а радиус равен p (напомним, что степень эллиптической инверсии, преобразующей каждую «прямую» и каждую «плоскость» сети в самое себя, равна $-p^2$). Заметим, что в эллиптической сети сфер диаметрально-ная сфера совсем не играет той исключительной роли, какую играет ортогональная сфера гиперболической сети (абсолют гиперболического пространства). Диаметрально-ная сфера принципиально ничем не отличается от остальных сфер сети и все ее точки принадлежат нашему эллиптическому пространству. Точки же ортогональной сферы гиперболической сети, как мы знаем, не принадлежат гиперболическому пространству.

«Точкой» эллиптической плоскости является пара диаметрально противоположных точек диаметральной сферы (пара AA на рис. 156). «Прямой» эллиптической плоскости служит окружность большого круга. На рисунке 156 показана «прямая» l , проходящая через «точки» A и B .

Непосредственно отсюда следует одно из наиболее важных предложений эллиптической планиметрии:

A_7^1 . Две различные прямые одной и той же плоскости всегда имеют одну и только одну общую точку.

Действительно, две окружности большого круга на сфере всегда пересекаются в двух диаметрально противоположных точках (на рис. 157 «прямые» m и n пересекаются в «точке» A).

Ввиду того, что дальнейшее изучение свойств эллиптической плоскости приводит к предложениям, весьма сильно отличающимся от предложений евклидовой планиметрии, мы будем для большей наглядности рассматривать еще одну систему геометрических объектов, изоморфную системе точек и прямых эллиптической плоскости.

Для этого мы каждой «точке» эллиптической плоскости приведем в соответствие диаметральною прямую, проходящую через эту пару точек. Каждой «прямой» эллипти-

ческой плоскости приведем в соответствие плоскость большого круга, который ограничен данной окружностью на сфере. Нетрудно убедиться в том, что множество прямых и плоскостей, проходящих через радикальный центр S , образует систему, изоморфную системе «точек» и «прямых» эллиптической плоскости относительно аксиом сочетания. Действительно, каждые две прямые этой связки определяют единственную плоскость, проходящую через них. В то же время и каждые две плоскости связки определяют единст-

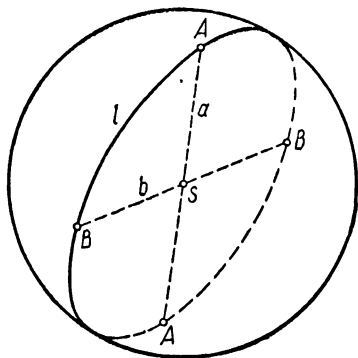


Рис. 156

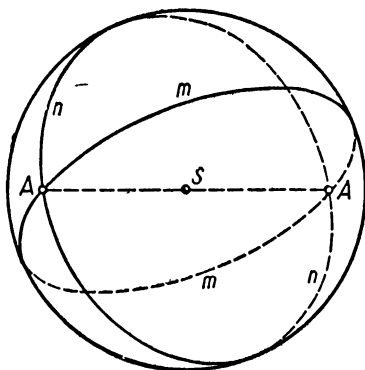


Рис. 157

венную прямую их пересечения. В дальнейшем мы убедимся в том, что этот изоморфизм распространяется и на все остальные аксиомы эллиптической плоскости.

Аксиомы порядка эллиптической плоскости существенным образом отличаются от аксиом порядка евклидовой и гиперболической плоскостей. Это объясняется тем, что в эллиптическом пространстве прямая замкнута, и потому, двигаясь по этой прямой из данной точки A в одном и том же направлении, мы в конце концов вернемся в ту же точку A . На евклидовой и гиперболической прямой такое движение невозможно, так как на этих прямых существуют несобственные точки, которых нельзя достигнуть конечным числом шагов.

Для того чтобы сделать более наглядным расположение точек и прямых на эллиптической плоскости, воспользуемся опять стереографической проекцией и отобразим диаметрально сферу на плоскость, проходящую через ради-

кальный центр S . Тогда все «прямые» эллиптической плоскости преобразуются в окружности эллиптической связки с радикальным центром S и диаметральной окружностью, которая получится от пересечения плоскости проекции с диаметральной сферой. По свойству стереографической проекции на полученную плоскость переносятся соотношения сочетания и порядка, какие мы имели на диаметральной сфере. На рисунке 158 дано изображение сферы рисунка 157 в стереографической проекции. Мы будем пользоваться изображением диаметральной сферы и в стереографической и в обычной — ортогональной проекции.

Аксиомы порядка эллиптического пространства следующие:

$A_1^{(2)}$. *Две различные точки прямой разделяют эту прямую на две и только на две части, называемые отрезками.*

На каждом из этих отрезков имеется по крайней мере одна точка. На рисунке 159 показана «прямая» l , разделяемая «точками» A и B на два «отрезка».

$A_2^{(2)}$. *Точки, принадлежащие различным отрезкам, не могут совпадать друг с другом.*

Предложение совершенно очевидное и не требует специальных разъяснений.

$A_3^{(2)}$. *На каждой прямой существуют два и только два взаимно противоположных направления, которые определяются тремя точками, взятыми в определенном порядке. Направление, определяемое точками A , B и C , обозначается символом \overline{ABC} . Например, на рисунке 159 на пря-*

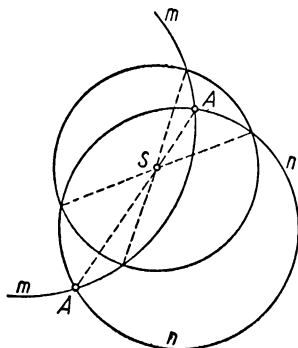


Рис. 158

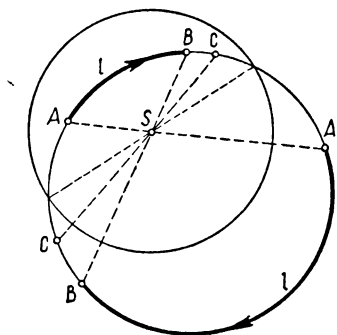


Рис. 159

мой l задано направление точками A , B и C : непрерывным движением мы можем перейти от A к B , от B к C и от C обратно к A . Противоположным будет направление \overline{CBA} .

$A_4^{(2)}$. Если в символе направления поменять местами две буквы, то направление меняется на обратное.

Например, направление \overline{ABC} противоположно направлению \overline{BAC} (рис. 159). Тождественность направления обозначается знаком тождества (\equiv), противоположность направлений перечеркнутым знаком тождества (\neq). Из предыдущей аксиомы получаем:

$\overline{ABC} \equiv \overline{BCA} \equiv \overline{CAB}$ и так же $\overline{ACB} \equiv \overline{CBA} \equiv \overline{BAC}$.
Вместе с тем $\overline{ABC} \neq \overline{BCA}$.

$A_5^{(2)}$. Если $\overline{ABC} \neq \overline{ADC}$, то $\overline{ABC} \equiv \overline{DBC}$.

В этом случае точки B и D принадлежат к различным отрезкам, определяемым точками A и C (рис. 160), тогда как точки A и D принадлежат одному и тому же отрезку, определяемому точками B и C .

Из пяти приведенных аксиом можно получить ряд выводов, важнейшие из которых следующие:

1. На каждом отрезке существует бесконечное множество точек.

2. Установив направление на прямой, можно ввести понятие «предшествовать» и «следовать» на каждом отдельном отрезке, причем свойства этих соотношений остаются такими же, как и на отрезках евклидовой и гиперболической прямой.

11. 3. Пять предыдущих аксиом порядка для прямой эллиптического пространства позволяют полностью описать расположение точек на этой прямой. Вместо понятия «между», которое применимо для трех точек евклидовой и гиперболической прямой и не имеет смысла на прямой эллиптической, здесь пользуются понятием «разделения» двух пар точек. Именно говорят,

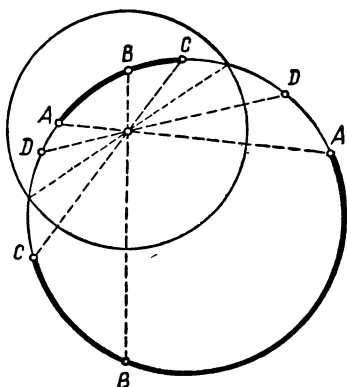


Рис. 160

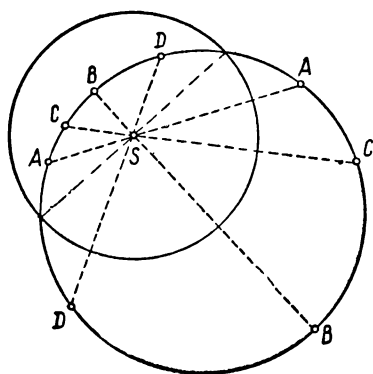


Рис. 161

что пара точек A и B разделяет пару C и D , если точки C и D находятся на различных отрезках, определяемых на прямой точками A и B (рис. 161). Если же C и D принадлежат одному и тому же отрезку, то говорят, что пара A и B не разделяет пару C и D (рис. 160). Разделение пары BC парой AB обозначается символом $AB \div CD$, неразделение — символом $AB \nmid CD$.

На основании аксиом порядка доказываются предложения:

1. Если $AB \div CD$, то и $CD \div AB$.
2. Из четырех данных точек единственным образом можно выделить две пары, взаимно разделяющие друг друга.

Для того чтобы перейти к вопросу о расположении точек и прямых на плоскости, необходимо ввести понятие проектирования.

Д₁. Два ряда точек, расположенные на двух прямых, получают друг из друга путем *центральной проекции*, если прямые, проходящие через соответственные точки, пересекаются в одной и той же точке — *центре проекции*. Пучок прямых, осуществляющих центральное проектирование, называется *проектирующим*. Эти два ряда точек и проектирующий пучок прямых называются *перспективно соответствующими* друг другу.

На рисунке 162 ряд точек $ABCD$ перспективно соответствует пучку прямых $abcd$ и ряду точек A', B', C', D' .

Последняя аксиома порядка определяет расположение точек и прямых на эллиптической плоскости.

A₅⁽²⁾. В перспективно соответствующих друг другу рядах точек и пучках прямых сохраняется расположение точек и прямых, определяемое первыми пятью аксиомами.

Двум отрезкам эллиптической прямой соответствуют два «угловых поля», которым принадлежат точки двух пар вертикальных углов, образуемых двумя прямыми, проходящими через эти точки. Это дает возможность определить

направление в пучке прямых, а также разделение одной пары прямых пучка парой прямых того же пучка. Например, на рисунке 162: $AC \div BD$ и точно так же $ac \div bd$ и $A'C' \div B'D'$.

Установленные понятия и аксиомы порядка приложимы и к изоморфной с эллиптической плоскостью системе прямых и плоскостей, проходящих через точку S .

Весьма существенной особенностью эллиптической плоскости является то, что проходящая по ней п р я м а я

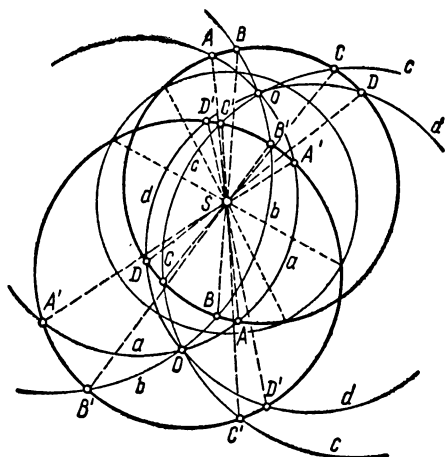


Рис. 162

не разделяет плоскость на две отдельные полуплоскости. В евклидовой и гиперболической плоскости мы для определения полуплоскостей пользовались тем, что отрезок, соединяющий две точки, не принадлежащие данной прямой, может либо пересекать ее, либо не пересекать. В эллиптической же плоскости две прямые всегда пересекаются и поэтому один из отрезков, определяемых двумя точками, пересекает прямую, а другой не пересекает, следовательно, всегда возможно перейти от одной точки к другой непрерывным движением, не пересекая данную прямую. А отсюда следует, что прямая не разделяет плоскость на две отдельные области. Это становится совершенно очевидным, если принять во внимание, что окружность большого круга на диаметральной

сфере делит эти сферы на две полусферы, но каждая точка одной полусферы с диаметрально противоположной точкой другой полусферы определяет только одну точку эллиптической плоскости.

Очень наглядно это свойство эллиптической плоскости отображается в изоморфной с ней связке прямых и плоскостей, проходящих через точку S . Здесь каждой прямой эллиптической плоскости соответствует плоскость связки, а каждой точке — прямая связки. Ни одна из плоскостей связки не разделяет связку прямых на две отдельные части, так как каждая прямая связки проходит одновременно в двух полупространствах, определяемых данной плоскостью.

11. 4. К о н г р у э н т н о с т ь ф и г у р на эллиптической плоскости мы определим при помощи осевой симметрии так же, как это было сделано в евклидовой и в гиперболической геометрии. Осевой симметрией мы и здесь назовем **г и п е р б о л и ч е с к у ю** инверсию относительно «прямой», т. е. окружности нашей связки.

На рассматриваемой нами эллиптической «плоскости», т. е. на диаметральной сфере сети, «прямыми» являются окружности большого круга и потому гиперболическая инверсия относительно них является симметрией относительно плоскости этого круга. Благодаря этому, дуги окружностей преобразуются в равные дуги, углы между дугами — в равные углы. В силу этого за меру длины «отрезка» на эллиптической плоскости целесообразно принять длину (евклидову) соответствующей дуги.

При измерении углов между «прямыми» эллиптической плоскости мы будем пользоваться обычными мерами — градусной или радианной.

Мы уже неоднократно проверяли, что гиперболическая инверсия в применении к параболической и гиперболической связке окружностей обладает всеми свойствами осевой симметрии. На эллиптической «плоскости», т. е. на поверхности диаметральной сферы, дело обстоит еще проще, так как симметрия относительно большого круга является симметрией и с точки зрения евклидовой геометрии и потому «равенство» фигур в эллиптической «плоскости» является равенством в обычном понимании этого слова.

В эллиптической плоскости, как и в евклидовой и в гиперболической, ось симметрии **п е р п е н д и к у л я р н а** к прямой, проходящей через пару взаимно симметричных точек, причем перпендикулярность есть свойство взаимное.

На рисунке 163 окружность l , проходящая через взаимно симметричные точки A и A' , ортогональна к «оси симметрии» — окружности s , так как взаимно перпендикулярны плоскости соответствующих больших кругов.

Однако перпендикулярность в эллиптической плоскости обладает одной особенностью, отличающей ее от перпендикулярности в плоскости Евклида и в гиперболической. Так как в эллиптической плоскости все прямые пересекаются

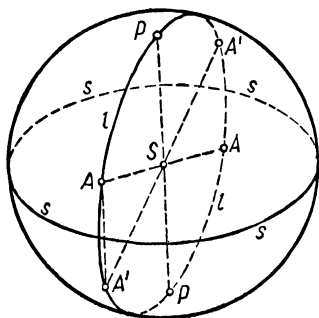


Рис. 163

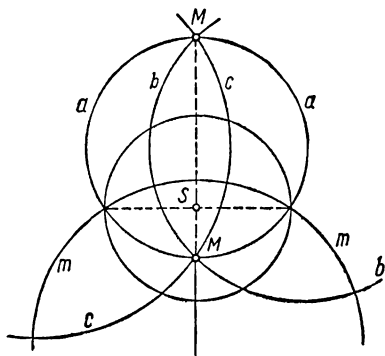


Рис. 164

между собой, то должны пересечься и два перпендикуляра к одной и той же прямой. Но тогда оказывается, что все перпендикуляры к одной прямой должны проходить через эту же точку. Действительно, на рисунке 164 к окружности m эллиптической связки проведены ортогональные окружности a и b той же связки, пересекающиеся в «точке» M . Этими окружностями определяется эллиптический пучок, ортогональный к окружности m . Поэтому все окружности, проходящие через пару точек M , будут ортогональны к окружности m . Полученный эллиптический пучок перпендикуляров — единственный для данной «прямой», так как он является общим пучком данной эллиптической связки и гиперболической связки, образуемой окружностями, ортогональными к окружности m . Это свойство «прямой» эллиптической плоскости весьма наглядно иллюстрируется глобусом с нанесенной на нем сеткой меридианов и параллелей: роль «прямой» m здесь играет экватор, а «перпендикулярами» служат

все меридианы, пересекающиеся в единственной «точке», определяемой двумя полюсами.

В изоморфной с эллиптической плоскостью связке прямых и плоскостей, проходящих через радикальный центр, «прямой» соответствует плоскость, а перпендикулярным к ней «прямым» соответствует пучок перпендикулярных плоскостей, проходящих через одну и ту же прямую, перпендикулярную к данной плоскости. Наглядно мы это можем представить себе, рассматривая глобус, в котором все плоскости, проходящие через ось, перпендикулярны к плоскости экватора.

Итак, для эллиптической плоскости мы имеем предложение:

Т₁. Каждой прямой эллиптической плоскости соответствует единственная точка, в которой пересекаются все перпендикуляры к этой прямой. Эта точка называется полюсом данной прямой.

Существование полюса обнаруживает еще одно интересное отличие эллиптической плоскости. Оно заключается в том, что при осевой симметрии в этой плоскости неподвижными оказываются не только все точки оси симметрии, но и еще одна точка, не принадлежащая оси,—ее полюс.

Т₂ (обратная). Каждой точке эллиптической плоскости соответствует единственная прямая, для которой эта точка служит полюсом. Эта прямая называется полярной данной точки.

Для доказательства этого предложения рассмотрим пучок «прямых», проходящих через «точку» M (рис. 164). Существует единственная окружность t , ортогональная к данному эллиптическому пучку и одновременно принадлежащая к эллиптической связке.

На диаметральной сфере каждому диаметру, концы которого определяют «точку» эллиптической плоскости, полярной этой точки будет единственная окружность большого круга, плоскость которого перпендикулярна к этому диаметру.

Важнейшим свойством поляр является свойство взаимности, выражаемое следующим предложением:

Если полюс t имеет полярной прямую m , то поляр любой точки прямой m проходит через точку M .

На рисунке 165 полюсом «прямой» m служит «точка» M .

На «прямой» m взята «точка» N . Полярной этой «точки» служит окружность, лежащая в плоскости, перпендикулярной к прямой NS и проходящей через точку M , так как $MS \perp NS$.

Из этого предложения следует, что ряду точек на одной и той же прямой соответствует пучок их поляр и, обратно, каждому пучку прямых соответствует ряд точек на полярной вершины этого пучка.

11.5. Измерение величин в эллиптической плоскости опирается на понятие непрерывности, которое обычно определяется через аксиому Дедекинда:

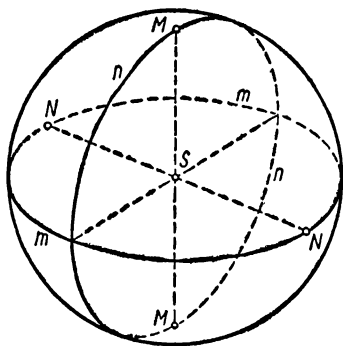


Рис. 165

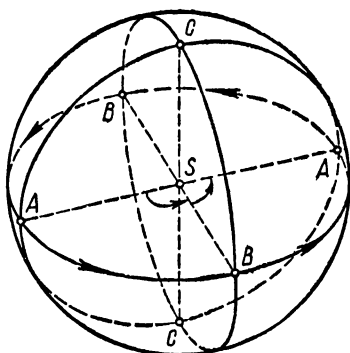


Рис. 166

$A_1^{(4)}$. Если все точки данного отрезка можно разделить на два класса, в каждом из которых имеются точки и все точки первого класса предшествуют всем точкам второго класса, то существует единственная точка, следующая за всеми точками первого и предшествующая всем точкам второго класса.

Как мы указывали выше, на основании аксиомы Дедекинда можно доказать аксиомы Архимеда и Кантора и уже известным путем обосновать измерение отрезков и углов.

Две точки A и B разбивают прямую на два отрезка, один из которых мы назовем AB , а другой — BA . Этим двум отрезкам соответствуют два угла ASB и BSA , дополняющие друг друга до развернутого (рис. 166). Как мы уже условились, за длину «отрезка» \overline{AB} мы будем принимать длину дуги AB окружности большого круга на диаметральной

сфере. Если эта длина в линейных единицах равна c , то радианная мера соответствующего угла равна $\frac{c}{p}$, где p — длина радиуса диаметральной сферы. Тогда радианная мера угла BSA будет равна $\pi - \frac{c}{p}$, а длина дуги BA и вместе с тем длина отрезка \overline{BA} будет равна $\pi - c$. Так как сумма отрезков $\overline{AB} + \overline{BA}$ дает всю прямую, то длина всей прямой выражается конечным числом.

$$(\overline{AB}) + (\overline{BA}) = c + \pi p - c = \pi p.$$

Если точке A соответствует поляр a' , а точке B — поляр b' (см. рис. 167, на котором мы для упрощения изоб-

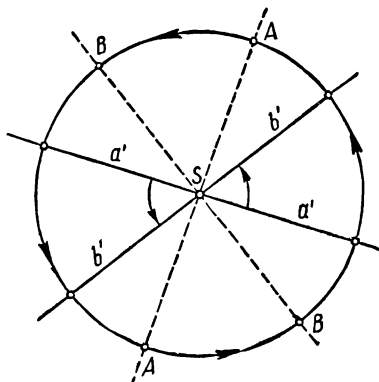


Рис. 167

ражения взяли точки A и B на диаметральной окружности эллиптической связки), то по свойству углов со взаимно перпендикулярными сторонами получим:

$\angle a'b' = \angle ASB$, $\angle b'a' = \angle BSA$, причем $\angle a'b' + \angle b'a' = \pi$ и, значит, $\angle b'a' + \angle ASB = \pi$ и $\angle a'b' + \angle BSA = \pi$.

Угол $\angle b'a'$ называется полярным углом по отношению к отрезку \overline{AB} и также угол $\angle a'b'$ есть полярный угол отрезка \overline{BA} . Если длина отрезка и величина угла выражены в радианах, то будем иметь:

$$(\overline{AB}) + (b'a') = \pi \text{ и также } (\overline{BA}) + (a'b') = \pi. \quad (1)$$

Рассмотрим теперь треугольник в эллиптической плоскости. Три точки A, B и C , не лежащие на одной и той же прямой, определяют четыре различных треугольника. Пусть первый из этих треугольников имеет сторонами отрезки $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ (рис. 168). Второй треугольник имеет с первым общую сторону \overline{BC} , остальными же сторонами служат отрезки \overline{AC} и \overline{BA} . Третий треугольник прилегает к первому стороной \overline{CA} и двумя другими являются отрезки \overline{CB} и \overline{BA} . Наконец, четвертый треугольник прилегает к первому стороной \overline{AB} , а две другие стороны суть отрезки \overline{CB} и \overline{AC} .

Как уже указывалось выше, сумма внутренних углов треугольника в эллиптической плоскости должна быть больше 180° . Введем следующие обозначения для углов наших треугольников:

$\angle CAB = \alpha, \angle BAC = \alpha', \angle ABC = \beta, \angle CBA = \beta',$
 $\angle BCA = \gamma, \angle ACB = \gamma',$ причем по свойству смежных углов имеем:

$$\alpha + \alpha' = \pi, \beta + \beta' = \pi, \gamma + \gamma' = \pi.$$

Обозначая через $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ сумму внутренних углов каждого из полученных треугольников, находим:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= \alpha + \beta + \gamma \\ \Delta_2 &= \alpha + \beta' + \gamma' \\ \Delta_3 &= \alpha' + \beta + \gamma' \\ \Delta_4 &= \alpha' + \beta' + \gamma \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Суммируя эти равенства, получим:} \\ &\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 = 6\pi. \\ &\text{Отсюда следует, что сумма внутрен-} \\ &\text{них углов треугольника эллиптичес-} \\ &\text{кой плоскости больше } \pi. \end{aligned}$$

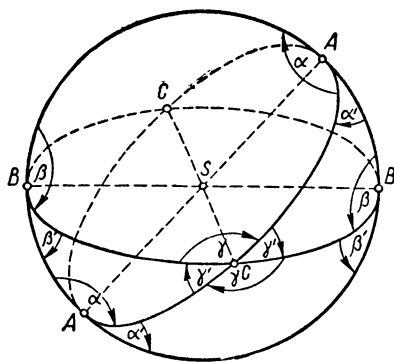


Рис. 168

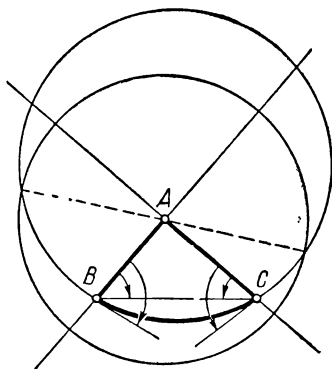


Рис. 169

Это также легко проверить, преобразуя любой треугольник эллиптической связки в равный треугольник с вершиной в центре S (рис. 169). Тогда мы увидим, что сумма внутренних углов прямолинейного треугольника ABC , равная π , будет всегда меньше суммы внутренних углов криволинейного треугольника ABC , так как угол при вершине A у них общий, а углы при вершине B и C у криволинейного треугольника больше соответствующих углов прямолинейного треугольника. Ве-

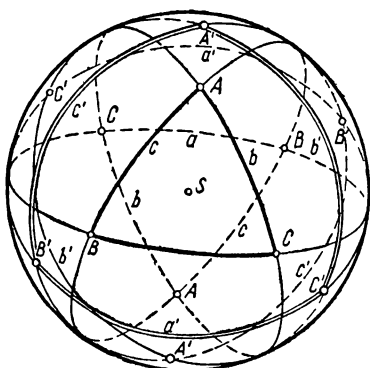


Рис. 170

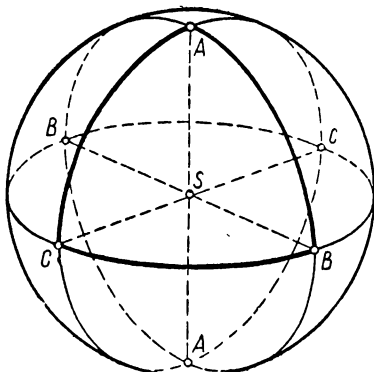


Рис. 171

личина $e = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$ — разности между суммой внутренних углов эллиптического треугольника и числом π называется **избытком** (экссессом) данного треугольника.

11.6. Возьмем произвольный треугольник ABC и найдем полярные a', b', c' трех его вершин. Так как точки A, B и C не лежат на одной и той же прямой, то полярные их не проходят через одну и ту же точку. Обозначим через A', B', C' соответственно точки пересечения поляр b' и c' , c' и a' , a' и b' (рис. 170). Три точки A', B' и C' определяют четыре треугольника. Выберем из этих треугольников тот, внутренние углы которого служат полярными углами сторон треугольника ABC . Этот треугольник называется **полярным** по отношению к треугольнику ABC . В силу взаимности полярного соответствия точки A', B' и C' являются полюсами сторон $BC \equiv a$, $CA \equiv b$ и $AB \equiv c$ треугольника ABC . Поэтому треугольник ABC тоже по-

лярен относительно треугольника $A'B'C'$. На рисунке 170 взаимно полярные треугольники ABC и $A'B'C'$ изображены на диаметральной сфере. На основании формулы (1) предыдущего пункта будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} (BC) + (c'b') &= \pi, & (CA) + (a'c') &= \pi, & (AB) + (b'a') &= \pi \\ (B'C') + (cb) &= \pi, & (C'A') + (ac) &= \pi, & (A'B') + (ba) &= \pi \end{aligned} \right\} (1)$$

Если каждая вершина треугольника служит полюсом противоположной стороны, то такой треугольник называется **автополярным**. В автополярном треугольнике длины всех его сторон и величины всех его углов равны $\frac{\pi}{2}$,

так как всякая прямая, проходящая через полюс, перпендикулярна к полярю. На рисунке 171 показаны четыре автополярных треугольника.

Обозначив через α , β и γ величины внутренних углов при вершинах данного треугольника, получим, что в полярном треугольнике $A'B'C'$ длины сторон будут таковы: $(\overline{B'C'}) = \pi - \alpha$, $(\overline{C'B'}) = \pi - \beta$, $(\overline{C'A'}) = \pi - \gamma$.

Суммируя, получим периметр этого треугольника:

$$(\overline{B'C'}) + (\overline{C'A'}) + (\overline{A'B'}) = 3\pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Но мы знаем, что $\alpha + \beta + \gamma > \pi$, поэтому

$$(\overline{B'C'}) + (\overline{C'A'}) + (\overline{A'B'}) < 2\pi.$$

А так как любой треугольник в эллиптической плоскости является полярным для некоторого треугольника, то мы заключаем отсюда:

Если длина сторон любого треугольника в эллиптической плоскости выражена в радианной мере, то его периметр меньше 2π .

Взаимосвязь между элементами взаимно полярных треугольников обуславливает справедливость следующих предложений:

Если данные треугольники равны между собой, то равны и их полярные треугольники.

Отсюда далее следует, что к трем признакам равенства треугольников, общим во всех трех геометриях (в эллиптической, как и в гиперболической), нужно добавить четвертый:

Если в эллиптической плоскости три угла одного треугольника соответственно равны трем углам другого, то такие треугольники равны между собой.

Действительно, если равны углы данных треугольников, то у их полярных треугольников три стороны одного соответственно равны трем сторонам другого. Поэтому полярные треугольники равны между собой, а значит, равны и данные треугольники.

Отсюда заключаем, что в эллиптической геометрии, как и в гиперболической, нет места соотношениям подобия, так

как в ней нет треугольников с соответственно равными углами, но различных по величине сторон.

11.7. Перейдем теперь к выводу формул решения треугольников в эллиптической плоскости. Начнем с косоугольного треугольника. Из четырех треугольников, определяемых точками A , B и C , выберем тот, в котором есть два острых угла. Такой треугольник всегда найдется, так как если α , β и γ — величины углов при вершинах A , B и C данного тре-

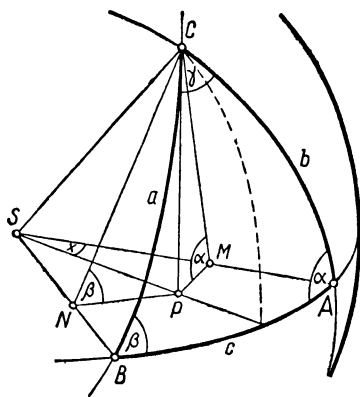


Рис. 172

угольника, то у треугольника, прилегающего к стороне \overline{BC} , углы равны α , $\pi - \beta$, $\pi - \gamma$, у треугольника, прилегающего к стороне \overline{CA} , углы равны $\pi - \alpha$, β , $\pi - \gamma$, у треугольника, прилегающего к стороне \overline{AB} , углы равны $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$, γ . Ясно, что в какой-нибудь из этих четырех комбинаций найдутся два острых угла.

Итак, допустим, что в треугольнике ABC углы α и β при вершинах A и B — острые (рис. 172). Соединим вершины A , B и C с центром S диаметральной сферы. Так как углы α и β — острые, то проекция P вершины C на плоскость ASB попадет внутрь угла ASB . Обозначим через M и N проекции точки P на радиусы \overline{SA} и \overline{SB} .

Обозначим через a , b и c длины сторон \overline{BC} , \overline{CA} и \overline{AB} в радианной мере. Тогда получим:

$\angle BSC = a$, $\angle CSA = b$, $\angle ASB = c$. Положим также, что $\angle MSP = x$. По теореме о трех перпендикулярах $CM \perp SA$ и $CN \perp SB$ и вместе с тем $\angle CMP = \alpha$ и $\angle CNP = \beta$.

Рассматривая соотношения в полученных прямоугольных треугольниках, находим:

$$\text{Из } \triangle SCN: \overline{SN} = \overline{SC} \cdot \cos a; \quad \text{из } \triangle SPN: \overline{SN} = \overline{SP} \cos(c-x) = \overline{SP} \cdot \cos x \cos c + \overline{SP} \cdot \sin x \sin c.$$

$$\text{Но из } \triangle SPM: \overline{SP} \cdot \cos x = \overline{SM}; \quad \overline{SP} \cdot \sin x = \overline{PM}. \quad \text{Из } \triangle SCM: \overline{SM} = \overline{SC} \cdot \cos b, \quad \text{наконец, из } \triangle CMP: \overline{PM} = \overline{CM} \cdot \cos \alpha = \overline{SC} \cdot \sin b \cdot \cos \alpha.$$

Сравнивая полученные значения для \overline{SN} , находим:

$$\overline{SN} = \overline{SC} \cdot \cos a = \overline{SC} \cdot \cos b \cos c + \overline{SC} \cdot \sin b \sin c \cos \alpha.$$

Деля обе части на \overline{SC} , получим формулу косинусов:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cos \alpha.$$

По аналогии получаем для двух других сторон:

$$\left. \begin{aligned} \cos b &= \cos c \cdot \cos a + \sin c \sin a \cos \beta, \\ \cos c &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Далее имеем: $\overline{CP} = \overline{CM} \cdot \sin \alpha = \overline{SC} \cdot \sin \beta \sin \alpha$ и вместе с тем $\overline{CP} = \overline{CN} \cdot \sin \beta = \overline{SC} \cdot \sin a \cdot \sin \beta$.

Сравнивая полученные выражения, находим:

$$\overline{SC} \cdot \sin b \sin \alpha = \overline{SC} \cdot \sin a \sin \beta, \quad \text{или} \quad \frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta}.$$

Обобщая, получим формулу синусов:

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}. \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) справедливы и для трех треугольников, примыкающих к треугольнику ABC . Возьмем, например, треугольник, примыкающий к стороне \overline{BC} . В нем мы имеем: $a' = (\overline{BC}) = a$; $b' = (\overline{AC}) = \pi - b$; $c' = (\overline{BA}) = \pi - c$; угол α' при вершине A равен α , при вершине B равен $\beta' = \pi - \beta$, при вершине C равен $\gamma' = \pi - \gamma$.

Если в первой формуле косинусов заменить b через $\pi - b'$, c — через $\pi - c'$, то получим:

$\cos a' = \cos(\pi - b') \cos(\pi - c') + \sin(\pi - b') \sin(\pi - c') \cos a'$,
или: $\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos a'$ — формула косинусов осталась неизменной. Произведем такую же подстановку во вторую формулу: $\cos(\pi - b') = \cos(\pi - c') \cdot \cos a' + \sin(\pi - c') \sin a' \cdot \cos(\pi - \beta')$, или: $-\cos b' = -\cos c' \cdot \cos a' - \sin c' \sin a' \cos \beta'$, т. е.

$\cos b' = \cos c' \cos a' + \sin c' \sin a' \cos \beta'$ — формула опять остается неизменной.

Неизменность формулы синусов совершенно очевидна ввиду равенств: $\sin(\pi - a) = \sin a$, $\sin(\pi - a) = \sin a$ и т. д.

Итак, полученные формулы справедливы для любого треугольника эллиптической плоскости.

Применим теперь формулу косинусов к полярному треугольнику со сторонами $\pi - a$, $\pi - \beta$ и $\pi - \gamma$ и углами $\pi - a$, $\pi - b$, $\pi - c$. Тогда получим: $\cos(\pi - a) = \cos(\pi - \beta) \cos(\pi - \gamma) + \sin(\pi - \beta) \sin(\pi - \gamma) \cos(\pi - a)$.

Преобразуя по формуле приведения, получим:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a \\ \cos \beta &= -\cos \gamma \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \cos b \\ \cos \gamma &= -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Полученные формулы называются полярными формулами косинуса.

Из формулы синусов мы полярным преобразованием, очевидно, новых формул не получим.

Чтобы получить формулы для прямоугольного треугольника, положим $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Тогда из последней формулы косинусов получим:

$$\cos c = \cos a \cos b. \quad (4)$$

Из теоремы синусов найдем:

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin c}{1}, \text{ или } \sin a = \sin \alpha \sin c \quad (5)$$

$$\text{и так же } \sin b = \sin \beta \sin c. \quad (5')$$

Две первые формулы (3) дают:

$$\cos \alpha = \sin \beta \cos a \quad (6)$$

$$\cos \beta = \sin \alpha \cos b \quad (6')$$

Третья из формул (3) дает:

$$\cos \alpha \cos \beta = \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos c, \text{ следовательно,} \\ \cos c = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta. \quad (7)$$

Так как $\cos \alpha = \sin \beta \cos a$ и $\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c}$, то почленным делением этих равенств получим:

$\operatorname{ctg} \alpha = \sin \beta \cdot \sin c \operatorname{ctg} a$. Но $\sin \beta \sin c = \sin b$, поэтому $\operatorname{ctg} \alpha = \sin b \operatorname{ctg} a$, откуда находим:

$$\sin b = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} a \quad (8')$$

и аналогично

$$\sin a = \operatorname{ctg} \beta \operatorname{tg} b \quad (8)$$

Наконец, из первой формулы получим:

$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$. Умножим на $\cos b$ числитель и знаменатель последней дроби и получим:

$$\cos \alpha = \frac{\cos a \cos b - \cos^2 b \cos c}{\cos b \sin b \sin c}. \text{ Но } \cos a \cos b = \cos c, \text{ по-} \\ \text{этому } \cos \alpha = \frac{\cos c - \cos^2 b \cos c}{\cos b \sin b \sin c} = \frac{\cos c (1 - \cos^2 b)}{\cos b \sin b \sin c} = \frac{\cos c \sin^2 b}{\cos b \sin b \sin c}.$$

$$\text{Окончательно } \cos \alpha = \operatorname{ctg} c \cdot \operatorname{tg} b. \quad (9)$$

$$\text{Аналогично } \cos \beta = \operatorname{ctg} c \cdot \operatorname{tg} a. \quad (9')$$

Полученные нами десять формул для прямоугольного треугольника достаточны для его решения во всех случаях. Для запоминания их пользуются п р а в и л о м Н е п е р а, аналогичным правилу для прямоугольных треугольников в гиперболической плоскости.

Напишем элементы прямоугольного треугольника $\frac{\pi}{2} - a$, $\frac{\pi}{2} - b$, α , c , β в пяти секторах правильного пятиугольника (рис. 173). Тогда получим правило:

Косинус каждого элемента равен произведению котангенсов двух смежных элементов, а также произведению синусов двух несмежных элементов.

Нетрудно проверить, что, пользуясь этим правилом, можно получить любую из выведенных нами формул для прямоугольного треугольника.

11.8. Посмотрим теперь, каковы свойства окружности в эллиптической плоскости. Определение окружности остав-

ся тем же, какое мы давали в евклидовой и в гиперболической геометрии.

Д₁. *Окружность есть геометрическое место точек, симметричных с данной точкой относительно всех прямых данного эллиптического пучка.*

Отсюда следует, что окружность есть геометрическое место точек, находящихся на одном и том же расстоянии от данной точки—центра пучка. Из этого определения обычным путем получаются предложения о симметрии окружности, о соотношениях между дугами, хордами и центральными углами и т. д.

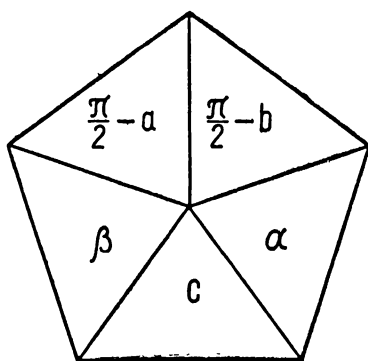


Рис. 173

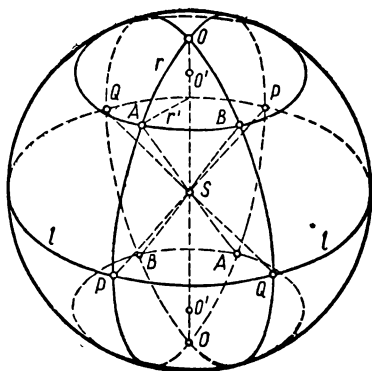


Рис. 174

Однако данное определение нуждается в одной существенной оговорке. Дело в том, что если расстояние от данной точки равно $\frac{\pi}{2}$, то геометрическим местом точек служит прямая — полярная данной точки.

На рисунке 174 показана окружность с центром O и «прямая» l — полярная точки O .

Из соотношения между полюсом и полярной получается важное свойство окружности в эллиптической плоскости, существенным образом отличающее эту окружность от окружности в евклидовой плоскости.

Т₁. *Геометрическое место точек, находящихся на данном расстоянии от данной прямой, есть окружность, центром которой служит полюс этой прямой.*

Если l — данная «прямая» и точка O — ее полюс, P и Q — точки данной прямой, то, отложив на «прямых» PO и QO (рис. 174) равные расстояния $\overline{PA} = \overline{QB}$, получим, что $\overline{OA} = \overline{OP} - \overline{PA}$ и $\overline{OB} = \overline{OQ} - \overline{QB}$ и, значит, $\overline{OA} = \overline{OB}$, т. е. точки A и B принадлежат окружности с центром O . Необходимо заметить, что это геометрическое место вырождается в точку (нулевую окружность), если данное расстояние окажется равным $\frac{\pi}{2}$. Таким образом,

в эллиптической плоскости окружность является линией равных расстояний (эвклидистантой) от прямой — полярны центра этой окружности.

Формула длины окружности получается на основании следующих соображений. Пусть r — длина радиуса \overline{OA} , выраженная в тех же единицах, что и длина p — радиуса диаметральной сферы. Тогда радианная мера угла ASO (рис. 174) равна $\frac{r}{p}$. Пусть O' — проекция точки A на диаметральную прямую SO . Тогда $r' = \overline{O'A}$ есть радиус той же окружности, если ее рассматривать как окружность евклидовой плоскости.

Отсюда получаем: $r' = p \sin \frac{r}{p}$ и длина C окружности будет равна:

$$C = 2\pi r' = 2\pi p \sin \frac{r}{p}, \quad \text{т. е.} \quad C = 2\pi p \sin \frac{r}{p}.$$

Если $p = 1$, то получим: $C = 2\pi \sin r$. В заключение скажем несколько слов об измерении площадей в эллиптической плоскости.

Подобно тому как в гиперболической плоскости для введения меры площади мы использовали понятие дефекта треугольника, в эллиптической геометрии мы используем аналогичное понятие избытка треугольника, т. е. величину $\varepsilon = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$, где α, β, γ — величины внутренних углов треугольника в радианной мере. Так же, как в гиперболической плоскости, доказывается, что *равные треугольники имеют и равные избытки* и что *избыток треугольника, состоящего из нескольких треугольников, равен сумме избытков составляющих его частей*. На основании этих свойств получаем:

Площадь треугольника определяется как число, пропорциональное его избытку. Коэффициентом пропорциональности берется p^2 — квадрат радиуса диаметральной сферы.

Площадь многоугольника определяется как сумма площадей треугольников, на которые этот многоугольник можно разбить. При этом предварительно доказывается, что это число не зависит от способа разбиения многоугольника на треугольники.

Выше мы видели, что три точки, не лежащие на одной и той же прямой, определяют четыре треугольника, которые заполняют всю плоскость. Сумма всех внутренних углов этих треугольников, как мы видели, равна 6π , а сумма избытков равна $4\pi = 2\pi$. Отсюда следует, что *площадь всей эллиптической плоскости равна $2\pi p^2$.*

Упражнения

1. Определить площадь автополярного треугольника на диаметральной сфере с радиусом p .

2. Доказать, что в эллиптическом пространстве две плоскости всегда пересекаются.

3. Доказать, что в эллиптическом пространстве два перпендикуляра к одной и той же плоскости пересекаются между собой.

4. Пользуясь результатом предыдущего упражнения, доказать, что все перпендикуляры к одной и той же плоскости пересекаются в единственной точке, называемой *полусом* данной плоскости.

5. Доказать, что для всякой точки эллиптического пространства существует единственная плоскость, для которой эта точка служит полюсом. Эта плоскость называется *полярной плоскостью* данной точки.

6. *Сферой* эллиптического пространства называется геометрическое место точек, симметричных с данной точкой относительно всех прямых данной эллиптической связи. Какую оговорку необходимо сделать в этом определении?

7. Доказать, что сфера эллиптического пространства есть геометрическое место точек, отстоящих на данное расстояние от данной плоскости.

8. Доказать, что если точка принадлежит данной плоскости, то ее полярная плоскость проходит через полюс данной плоскости.

9. Доказать, что полярные плоскости всех точек данной прямой пересекаются по одной и той же прямой, называемой *полярной* данной прямой.

10. Доказать, что полярность двух прямых эллиптического пространства есть свойство взаимное.

11. Провести через данную точку плоскость, перпендикулярную к данной прямой.

12. Через данную точку провести плоскость, перпендикулярную к двум данным плоскостям.

ОБЩИЕ ВЫВОДЫ. ГЕОМЕТРИЯ И РЕАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО

12.1. В заключительной главе мы рассмотрим некоторые общие вопросы. В первую очередь сравним между собой две неевклидовы геометрии. На первый взгляд создается впечатление о чрезвычайно резких различиях в свойствах гиперболического и эллиптического пространства.

В самом деле, в гиперболической плоскости существует бесконечное множество прямых, не пересекающих данную прямую; в эллиптической плоскости все прямые пересекают друг друга.

В гиперболической плоскости прямая бесконечна, в эллиптической плоскости прямая конечна (замкнута) и длина ее равна πr , где r — длина радиуса диаметральной сферы. В гиперболической плоскости сумма внутренних углов треугольника меньше π , в эллиптической плоскости — больше π . Подобных примеров можно было бы привести очень много.

Однако весьма замечательным обстоятельством является глубокая аналогия между формулами тригонометрии эллиптического и гиперболического пространства. Для сопоставления напомним их параллельно и сравним:

Гиперболическая геометрия. Эллиптическая геометрия

Прямоугольный треугольник

$\text{ch } c = \text{ch } a \text{ ch } b$	$\cos c = \cos a \cos b$
$\text{ch } c = \text{ctg } a \text{ ctg } \beta$	$\cos c = \text{ctg } a \text{ ctg } \beta$
$\text{th } a = \cos \beta \cdot \text{th } c$	$\text{tg } a = \cos \beta \text{ tg } c$
$\cos a = \text{ch } a \sin \beta$	$\cos a = \cos a \sin \beta$
$\text{sh } a = \text{th } b \text{ ctg } \beta$	$\sin a = \text{tg } b \text{ ctg } \beta$
$\text{sh } a = \sin a \text{ sh } c$	$\sin a = \sin a \sin c$

Формулы косинусов

$$\text{ch } a = \text{ch } b \text{ ch } c - \text{sh } b \text{ sh } c \cos \alpha; \quad \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha,$$

Формулы синусов

$$\frac{\text{sh } a}{\sin a} = \frac{\text{sh } b}{\sin \beta} = \frac{\text{sh } c}{\sin \gamma}; \quad \frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}.$$

Сравнение этих формул показывает, что между ними обнаруживается большое сходство: все формулы гиперболической геометрии получаются из соответствующих формул эллиптической геометрии, если в этих формулах тригоно-

метрические формулы от аргументов, выражающих длину сторон, заменить соответствующими гиперболическими функциями, т. е. \sin заменить на sh , \cos — на ch , tg — на th . Так, например, из формулы $\cos \alpha = \cos \alpha \sin \beta$ мы получим формулу:

$$\cos \alpha = \text{cha} \sin \beta \text{ и т. д.}$$

Небольшим исключением является формула косинусов, в которой последний член правой части для гиперболического треугольника отличается знаком от последнего члена второй части для эллиптического треугольника.

Понятно, что такое совпадение не может быть случайным, и было бы интересно найти внутренние причины, обуславливающие наличие таких связей. Однако для обнаружения таких причин нам нужно познакомиться с некоторыми математическими фактами, установленными анализом, и которые нам придется принять без доказательства.

Ранее мы уже пользовались свойствами показательной функции с основанием e и указывали, что значения этой функции от аргумента x можно вычислить при помощи бесконечного ряда:

$$e^x = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (1)$$

Доказано, что ряд этот с х о д я щ и й с я для любого действительного x , т. е. что сумма n его членов при n , стремящемся к бесконечности, стремится к определенному пределу, который и дает числовое значение функции $y = e^x$.

Было также установлено, что этим же рядом можно воспользоваться для определения показательной функции от м н и м о г о а р г у м е н т а. Если в формулу (1) подставить мнимое число ix , то получим, припоминая, что $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$, $i^7 = -i$, $i^8 = 1$ и т. д., отделяя действительную часть от мнимой:

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right).$$

Знакопеременные ряды, находящиеся в скобках, — тоже сходящиеся, причем оказывается, что первый из них

определяет тригонометрическую функцию $\cos x$, а второй — тригонометрическую функцию $\sin x$.

Итак, мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

И вместе с тем:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \quad (3)$$

Формулы (2) показывают, что $\cos x$ есть ч е т н а я функция, не меняющая своего значения при изменении знака аргумента, тогда как функция $\sin x$ — н е ч е т н а я, т. е. при перемене знака аргумента меняет знак на обратный. Поэтому, меняя в формуле (3) знак аргумента на обратный, получим:

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x. \quad (3')$$

Почленным сложением и вычитанием формул (3) и (3') получим:

$$\left. \begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Если мы припомним определение гиперболических функций:

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad (5)$$

то мы сразу увидим замечательную аналогию между тригонометрическими и гиперболическими функциями, которая объяснит нам причину сходства формул решения треугольников в гиперболической и в эллиптической плоскости.

Представим себе, что длина радиуса диаметральной сферы, на которой мы осуществляли эллиптическую плоскость, выражается м н и м ы м ч и с л о м ip . Понятно, что такую сферу мы можем рассматривать только как объект математического рассуждения, не имея возможности сконструировать соответственный геометрический образ. Если длина дуги на эллиптической сфере выражается числом x , то ее радианная мера при радиусе ip выражается числом $\frac{x}{ip}$,

а если принять $p = 1$, то числом $\frac{x}{i}$. При этом условии мы получим:

$$\cos \frac{x}{i} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x,$$

$$\sin \frac{x}{i} = \frac{e^x - e^{-x}}{2i} = \frac{\operatorname{sh} x}{i}, \text{ наконец, } \operatorname{tg} \frac{x}{i} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{\operatorname{th} x}{i}.$$

Если стороны треугольника в радианной мере выражаются числами $\frac{a}{i}$, $\frac{b}{i}$, $\frac{c}{i}$, то, подставляя эти значения в формулы решения треугольников на эллиптической плоскости, получим:

$$\cos \frac{c}{i} = \cos \frac{a}{i} \cos \frac{b}{i} \text{ или } \operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b.$$

Таким же путем находим:

$$\operatorname{tg} \frac{a}{i} = \cos \beta \operatorname{tg} \frac{c}{i} \text{ или } \frac{\operatorname{th} a}{i} = \cos \beta \frac{\operatorname{th} c}{i}, \text{ т. е. } \operatorname{th} a = \cos \beta \operatorname{th} c.$$

Подобным образом преобразуются и все остальные формулы решения прямоугольных треугольников.

Формула косинусов преобразуется так:

$$\cos \frac{a}{i} = \cos \frac{b}{i} \cos \frac{c}{i} + \sin \frac{b}{i} \sin \frac{c}{i} \cos \alpha \text{ или}$$

$$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \cdot \operatorname{ch} c + \frac{\operatorname{sh} b \cdot \operatorname{sh} c}{i^2} \cos \alpha$$

и, наконец:

$$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \cdot \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b \cdot \operatorname{sh} c \cos \alpha.$$

Преобразование друг в друга формул синусов совершенно очевидно, и мы на них останавливаться не будем.

Подробное изучение планиметрии на поверхности сферы с мнимым радиусом показывает, что эта планиметрия изоморфна с гиперболической планиметрией. Надо заметить, что этот факт был замечен еще предшественниками неевклидовой геометрии — Ламбертом (1728—1771) и Тауринусом (1794—1874) и нашел себе подтверждение в работах творцов неевклидовой геометрии.

12.2. Формулы (2) предыдущего пункта дают возможность доказать, что в весьма малых областях эллиптического пространства, так же как и в весьма малых областях ги-

перболического пространства, имеет место геометрия Евклида. Полагая, что число x весьма мало, из этих формул получаем приближенные равенства:

$\cos x \approx 1$, $\sin x \approx x$ (с точностью до величин первого порядка малости), либо $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$ (с точностью до величин второго порядка малости).

Из формулы $\cos c = \cos a \cos b$ для прямоугольного треугольника получим:

$$1 - \frac{c^2}{2} \approx \left(1 - \frac{a^2}{2}\right) \left(1 - \frac{b^2}{2}\right),$$

или

$$1 - \frac{c^2}{2} \approx 1 - \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} + \frac{a^2 b^2}{4}, \text{ т. е. } c^2 = a^2 + b^2 - \frac{a^2 b^2}{2}.$$

Отбрасывая величину $\frac{a^2 b^2}{2}$ — четвертого порядка малости, получим: $c^2 \approx a^2 + b^2$, т. е. теорему Пифагора. Таким же путем из формулы $\cos \alpha = \cos a \sin \beta$ получим: $\cos \alpha \approx \sin \beta$, следовательно, $\alpha + \beta \approx \frac{\pi}{2}$, а это значит, что сумма внутренних углов в таком треугольнике весьма мало отличается от π , т. е. геометрия этой области приближается к геометрии Евклида.

Этим же путем мы из формулы косинусов получим:

$$c^2 \approx a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma,$$

т. е. теорему косинусов обычной тригонометрии, а из формулы синусов получим:

$$\frac{a}{\sin \alpha} \approx \frac{b}{\sin \beta} \approx \frac{c}{\sin \gamma},$$

т. е. формулу синусов в той же тригонометрии.

Н е п р о т и в о р е ч и в о с т ь эллиптической геометрии доказывается на основании тех же соображений, какими мы пользовались для доказательства непротиворечивости геометрии гиперболической.

Все соотношения между элементами эллиптического пространства мы получили, пользуясь его реализацией в эллиптической сети сфер. В то же время свойства этой сети мы получаем, опираясь на теоремы геометрии Евклида. Поэтому всякое противоречие в полученных выводах эллип-

тической геометрии было бы противоречием и в евклидовой системе, которую мы считаем непротиворечивой. Не нужно забывать и то, что те же самые свойства эллиптического пространства, которые мы сравнительно легко получили из свойств эллиптической сети сфер, можно было бы получить непосредственно из аксиом, пользуясь чисто логическими соображениями, независимо от каких

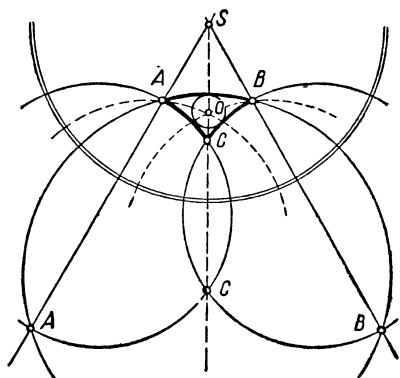


Рис. 175

бы то ни было конкретных интерпретаций этого пространства.

Отсюда следует, что эллиптическая геометрия столь же непротиворечива, как евклидова и гиперболическая.

12.3. Осуществимость евклидовой геометрии в малых областях эллиптического и гиперболического пространства можно очень наглядно показать на чертеже. Рассмотрим гиперболическую плоскость, определяемую абсолютом с центром S и радиусом, равным 4 см (рис. 175). На плоскости построен треугольник ABC со вписанным в него кругом с центром O . На этом чертеже очень хорошо видна криволинейность сторон треугольника ABC (если его рассматривать с точки зрения евклидовой геометрии), а также несовпадение центра O окружности гиперболической плоскости с центром O' той же окружности, если ее рассматривать как окружность евклидовой плоскости.

Увеличим теперь радиус абсолюта в 100 раз, оставляя неподвижными его центр S и точки A , B и C . При этом ус-

ловии радиус абсолюта окажется равным 400 см, т. е. четырем метрам, а радиус ортогональной окружности, проходящей через точки A и B , будет иметь в длину около 460 метров! При столь большом радиусе дугу AB нельзя будет отличить от прямолинейного отрезка. Это же можно сказать о дугах BC и CA . Объясняется это тем, что если в середине дуги AB провести к ней касательную, то даже на расстоянии 10 см от точки касания расстояние от точки касательной до окружности будет около 0,03 мм, т. е. меньше толщины наиболее тонких линий, проводимых рейсфедером или карандашом. Все это показано на рисунке 176, на котором для упрощения вычислений принято:

$\angle ASB = 60^\circ$, $SA = SB = 2$ см.

На этом же чертеже показана окружность, вписанная в треугольник ABC , причем положение центра гиперболической окружности настолько близко к положению центра евклидовой окружности, что различить это на рисунке не представляется возможным.

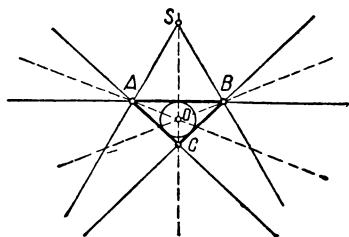


Рис. 176

Из этого примера мы видим, что даже при сравнительно небольших размерах абсолюта гиперболического пространства на малых участках этого пространства мы имеем такие геометрические соотношения, которые эмпирически неотличимы от соотношений евклидовой геометрии. Если же мы пойдем далее в направлении увеличения размеров абсолюта гиперболического пространства и поместим, например, его центр в центре Солнца, а радиус сделаем равным одному парсеку¹, то в таком гиперболическом пространстве в пределах нашей солнечной системы мы могли бы пользоваться законами евклидовой геометрии даже при самых точных астрономических вычислениях. Если же поместить центр абсолюта в центре нашей звездной системы — Галак-

¹ Напомним, что «парсек» (от слов «параллакс-секунда») есть астрономическая единица длины. Наблюдатель, удаленный от Солнца на расстояние, равное одному парсеку, видел бы радиус земной орбиты под углом в одну секунду. Это расстояние равно 206 265 радиусам земной орбиты или $3,08 \cdot 10^{12}$ км. Свет это расстояние проходит за 3,26 года.

тики, а радиус сделать равным одному мегапарсеку (мегапарсек = 10^6 парсек), то, находясь в гиперболическом пространстве, мы могли бы с высокой степенью точности использовать евклидову геометрию и во всей нашей Звездной системе.

Все только что сказанное можно в такой же степени применить и к эллиптической геометрии. Достаточно представить себе, что мы находимся внутри диаметральной сферы эллиптического пространства с достаточно большим радиусом, чтобы при помощи тех же самых построений убедиться, что геометрию ближайших к нам частей пространства нельзя будет отличить от евклидовой.

12.4. Из предыдущего изложения мы убедились в том, что существуют три, совершенно равноправные и внутренне не противоречивые геометрии, каждая из которых может быть осуществлена в системе определенных геометрических объектов.

Вместе с тем мы узнали и то, что если размеры сферической сети, определяющей гиперболическое или эллиптическое пространство, будут очень велики, то исследование ближайших к нам областей пространства не даст нам возможности отличить эти геометрии от евклидовой.

В течение весьма продолжительного времени и математики и физики были убеждены, что геометрия Евклида дает единственно правильное описание свойств реального пространства. Поэтому появление неевклидовых геометрий было встречено либо полным равнодушием, либо—недоброжелательной критикой. Поворотным моментом в этом отношении было появление в 1868 году работы итальянского математика Э. Бельтрами (*Eugenio Beltrami*, 1835—1900) «Опыт интерпретации неевклидовой геометрии». В этой работе Бельтрами показал, что планиметрия Лобачевского выполняется на поверхности постоянной отрицательной кривизны. Одну из таких поверхностей можно получить следующим образом. Рассмотрим график функции

$$y = \operatorname{ch} x.$$

Полученная кривая (рис. 177) называется *цепной*, так как форму этой линии принимает свободно подвешенная в двух точках тяжелая нить или цепь. Если представим себе, что эта нить разрезана в самой нижней своей точке *A* и нить «свивается» с кривой, то ее концы опишут новую кривую — *трактрисы*, асимптотически

приближающуюся к оси x . Вращая трактрису около оси x , получим поверхность вращения в виде двух сложенных между собой раструбов (рис. 178). На этой поверхности, называемой «псевдосферой», осуществляется планиметрия Лобачевского, если за прямую на ней принять линию кратчайшего расстояния (так называемую «геодезическую» линию).

Возможность конкретного отображения неевклидовой геометрии, обнаруженная Бельтрами, привлекла всеобщее внимание, и вскоре появился ряд работ, в которых давались новые интерпретации неевклидовой геометрии. Германский

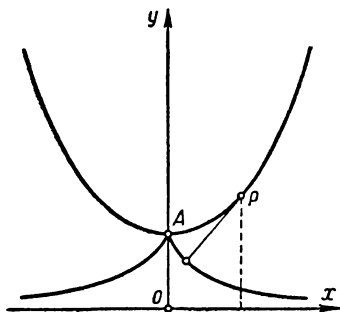


Рис. 177

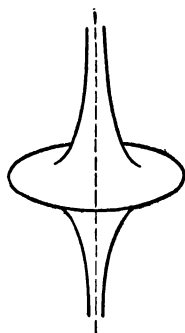


Рис. 178

математик Клейн (*Felix Klein*, 1849—1925) в работе «О так называемой неевклидовой геометрии» (1871) предлагает рассматривать точки, лежащие внутри некоторой поверхности второго порядка (например, внутри сферы), как точки гиперболического пространства. «Прямыми» этого пространства следует считать отрезки прямых, соединяющие точки этой поверхности. При этих условиях, определяя соответствующим образом «расстояние» между точками и меру угла между прямыми, Клейн показал, что полученное пространство изоморфно гиперболическому.

Выдающийся французский математик А. Пуанкаре (*Henri Poincaré*, 1854—1912) в своей работе «Теория фуксовых групп», появившейся в 1882 году, обнаружил, что планиметрия Лобачевского изоморфна геометрии гиперболической связки окружностей. Дальнейшее развитие идеи Пуанкаре привело к интерпретации евклидовой, гиперболической и эллиптической геометрии в сети сфер, что было опубликовано во втором томе «Энциклопедии элементар-

ной математики» Вебера и Вельштейна, изданной в Германии в 1905 году. Русский перевод этого тома был издан одесским издательством «*Mathesis*» в 1913 году. Именно этой интерпретацией евклидовой и неевклидовых геометрий мы и пользовались в наших лекциях.

Все эти конкретные реализации неевклидовых геометрий дали, с одной стороны, возможность наглядно показать системы пространственных объектов, подчиняющихся законам неевклидовых геометрий, а с другой стороны, обнаружили, что эти геометрии столь же непротиворечивы, как и геометрия Евклида.

Что же касается евклидовой геометрии, то полнота, независимость и непротиворечивость ее аксиом были установлены в классической работе германского математика Д. Гильберта (*David Hilbert*, 1862—1943) «Основания геометрии», вышедшей первым изданием в 1899 году.

12.5. Итак, мы видим, что наличие трех равноправных, логически безупречных и вполне реальных геометрических систем является общепризнанным научным фактом. Естественно возникает вопрос, какова же геометрия того физического пространства, в котором мы живем?

Ответ на этот вопрос должен явиться результатом большой совместной работы астрономов, физиков, математиков, философов — работы весьма сложной и до сих пор еще не завершенной.

Поэтому мы должны будем ограничиться несколькими общими соображениями по этому вопросу.

Согласно марксистско-ленинской теории познания «пространство есть форма существования материи», поэтому геометрические свойства предметов, описываемые аксиомами геометрии, суть не что иное, как свойства определенных материальных объектов. Отправляясь от этой точки зрения, мы должны прежде всего понять, что, осуществляя наши геометрические построения на бумаге или на доске, мы этим самым пытаемся сконструировать систему пространственных образов, изоморфную с системой реальных предметов окружающего нас мира. Пожалуй, наиболее важным геометрическим объектом, в значительной мере определяющим весь дальнейший путь нашего изучения, является **п р я м а я л и н и я**. Что же такое прямая линия? Это понятие мы получаем при созерцании предметов весьма разнообразных по своей физической природе. Мы называем «прямолинейным» путь светового луча (электромагнитные

колебания). «Прямой» мы называем нить отвеса (направление силовой линии поля земного тяготения). «Прямым» мы называем край линейки, которую проверили, проведя линию через две данные точки и потом перевернув другой стороной и вновь проведя линию через те же точки (в этом случае «прямой» является ось вращения твердого тела, закрепленного в двух точках). Мы считаем также «прямолинейным» ребро хорошо сформировавшегося кристалла (расположение молекул или атомов в кристаллической решетке). Наконец, мы убеждены, что тело, на которое не действуют никакие внешние силы, должно находиться либо в состоянии покоя, либо в состоянии равномерного прямолинейного движения.

В пределах наших земных экспериментов все эти определения прямой, по-видимому, совпадают друг с другом: край линейки, проверенный перевертыванием, оказывается прямолинейным и при проверке на глаз визированием вдоль ее края и прикладыванием к нити отвеса и т. д. Мало того, эксперимент с построением прямых обнаруживает справедливость 5-го постулата Евклида о параллельности, как это было показано нами в 4 главе. Конечно, не только этот эксперимент, но и вся тысячелетняя практика применения геометрии в землемерии, механике, физике, астрономии и т. д. показывает, что в наших земных условиях евклидова геометрия с достаточной степенью точности отображает пространственные соотношения материального мира. Этим и объясняется то, что в наших школах изучается геометрия Евклида, так как именно ею мы пользуемся во всей нашей практической деятельности.

Однако в настоящее время на наших глазах совершаются величайшие перемены в жизни человечества: человек преодолел силу земного тяготения и проник в космическое пространство и в то же время он шаг за шагом раскрывает строение атомного ядра и изучает поведение мельчайших частиц материи. В связи с этим естественно возникает вопрос: а какова структура пространства Большой Вселенной, какова геометрия внутриатомного мира?

Как было уже сказано, современная наука не дает окончательного ответа на эти вопросы и потому мы можем высказать только самые общие соображения в этом отношении. Прежде всего нужно помнить, что основными элементами пространства являются объекты, называемые нами «прямыми линиями». В космическом пространстве существует

несколько таких объектов. Во-первых, это траектория движения световых волн, или (что одно и то же) траектория движения частиц, несущих световую энергию фотонов. Во-вторых, прямолинейными считаются силовые линии полей тяготения, окружающих всякую массу вещества. В-третьих, прямолинейными являются траектории материальных частиц, свободно несущихся в мировом пространстве (космические лучи).

В наших земных масштабах все эти «прямые» считаются тождественными друг с другом, однако в мировом пространстве этого может и не быть, и потому мы не имеем основания говорить о геометрии этого пространства вообще, а можем говорить лишь о геометрии световых лучей, о геометрии полей тяготения и т. д. При этом не исключена возможность того, что эти геометрии могут быть совершенно различны. Вопрос этот еще больше осложняется тем, что согласно выводам общей теории относительности электромагнитные колебания и поле тяготения не независимы друг от друга.

Теоретически было установлено, а потом подтверждено наблюдениями, что прямолинейность световых лучей нарушается в поле тяготения: проходя около тела с большой массой (например, около Солнца), световые лучи искривляются. А так как большие массы вещества распределены во вселенной довольно неравномерно, то отсюда следует, что геометрия пространства световых лучей должна быть весьма сложной.

Вместе с тем общая теория относительности показала взаимозависимость пространства поля тяготения, пространства электромагнитного поля и времени; эти объекты вместе определяют четырехмерное пространство, законы которого постепенно выясняются работами современных физиков, астрономов, математиков.

В настоящее время с полной определенностью можно сказать, что *эти законы не являются законами евклидовой геометрии* и, по-видимому, ближе всего подходят к законам общей геометрии Римана.

Что же касается геометрии «внутриатомного мира», то здесь положение оказывается еще менее определенным. Если в космическом пространстве мы можем указать объекты, которые можно было назвать «прямыми линиями», то совершенно не представляется возможным сделать это в отношении атомного ядра. Поэтому мы ничего не можем сказать о «внутриатомном пространстве» и о его геометрии,

кроме того, что и здесь едва ли имеет место геометрия Евклида.

12.6. Нам остается сказать еще несколько слов о теоретическом и практическом значении гиперболической и эллиптической геометрии. Заметим попутно, что термины «гиперболическая» и «эллиптическая» связаны со свойствами кривых второго порядка — гиперболы и эллипса. Гипербола, как известно, обладает двумя асимптотами, причем асимптоты можно рассматривать, как касательные к кривой в двух ее несобственных точках.

Прямая в гиперболической плоскости также обладает двумя несобственными точками, в которых она пересекается с абсолютом.

Кривая второго порядка — эллипс несобственных точек не имеет, точно так же, как не имеет их и прямая эллиптической плоскости.

В связи с этим евклидову геометрию часто называют *параболической*, так как прямая евклидова пространства имеет единственную несобственную точку так же, как и кривая второго порядка — парабола.

Теоретическое значение открытия гиперболической и эллиптической геометрии весьма значительно. Прежде всего оно развеяло миф о том, что евклидова геометрия дает единственно правильное отображение структуры реального пространства. Оно показало, что аксиомы геометрии дают лишь приближенное знание об истинных свойствах пространства и что более точное и более широкое изучение вселенной и в пространстве и во времени может дать основу для построения геометрических систем, лучше отображающих пространственные соотношения. Этим была подготовлена почва для одного из величайших открытий современной науки — специальной и общей теории относительности.

Отметим, что уже вскоре после появления специальной теории относительности югославский физик Варичак применил формулы геометрии Лобачевского для вывода соотношений между относительными скоростями в *специальной* теории относительности. В настоящее же время общая геометрия Римана широко используется при изложении *общей* теории относительности.

Признание неевклидовых геометрий и обнаружение их непротиворечивости дало импульс к решительному и коренному пересмотру взглядов на основные принципы матема-

тики, в результате чего появился ряд работ, посвященных обоснованию различных разделов этой науки.

На почве этих исследований нашел себе применение и развитие аксиоматический метод, при помощи которого все разделы математики строятся на аксиоматической основе, содержащей перечень основных понятий и систему связывающих эти понятия аксиом. Эта система аксиом должна удовлетворять условиям непротиворечивости, независимости и полноты.

Первое условие — непротиворечивость — требует, чтобы ни сами аксиомы, ни следствия их не противоречили друг другу.

Второе условие — независимость — требует, чтобы ни одна из аксиом не была следствием других аксиом (например, аксиома параллельности не зависит от аксиом абсолютной геометрии, так как на базе этих аксиом можно построить и параболическую и гиперболическую геометрию).

Третье условие — полнота — требует, чтобы любое предложение, присоединенное к данной системе аксиом и относящееся к той же области математики, было либо следствием этой системы, либо противоречило им.

Заметим, наконец, что выводы неевклидовых геометрий были применены рядом математиков в теории автоморфных функций (А. Пуанкаре, Ж. Адамар и др.).

Сам Лобачевский использовал полученные им формулы неевклидовой геометрии для вычисления некоторых интегралов.

Имеются работы, в которых неевклидова геометрия используется в механике (работа Клейна и Зоммерфельда по теории движения волчка).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы прошли довольно длинный путь, начиная от простейших понятий и аксиом элементарной геометрии и кончая весьма широкими и общими проблемами современной науки. Наметим те основные выводы, к которым мы пришли.

1. В каждой геометрии мы должны видеть систему, изоморфно отображающую пространственные свойства некоторого множества объектов материального мира. Одной из таких систем является изучаемая в школе евклидова геометрия.

2. Как евклидова геометрия, так и геометрии гиперболическая и эллиптическая внутренне непротиворечивы. Каждое противоречие в одной из них неизбежно повлекло бы за собой противоречие и в каждой из остальных.

3. Открытие неевклидовой геометрии явилось одной из самых знаменательных вех на пути развития мировой науки. Именно поэтому английский математик В. Клиффорд назвал Н. И. Лобачевского за его великий научный подвиг «Коперником геометрии».

Упражнения

1. Решить задачу Аполлония о построении окружности, касательной к трем данным окружностям, рассматривая эти окружности как «прямые» эллиптической, параболической или гиперболической плоскости в зависимости от того, какая связка определяется этими тремя окружностями.

2. Доказать, что во всех трех геометриях имеет место предложение: суммы противоположных углов четырехугольника, вписанного в окружность, равны между собой.

3. Доказать, что во всех трех геометриях суммы противоположных сторон четырехугольника, описанного около окружности, равны между собой.

4. Примем за точки гиперболической плоскости точки, лежащие внутри круга, остальные же точки (включая и точки ограничиваю-

щей окружности) будем считать не принадлежащими этой плоскости. «Прямыми» назовем все хорды окружности. Доказать, что в этой плоскости имеют место все аксиомы сочетания и порядка, тогда как аксиома параллельности Евклида должна быть заменена аксиомой Лобачевского (интерпретация гиперболической плоскости, предложенная Ф. Клейном).

5. Доказать, что рассмотренную в предыдущей задаче интерпретацию Клейна можно получить из интерпретации Пуанкаре следующим образом. Возьмем сферу Σ с центром O и с окружностью σ на ней. «Прямыми» назовем все окружности сферы, ортогональные к окружности σ . Этим на сфере определится гиперболическая плоскость с абсолютом σ . Обозначим через Z вершину конуса, касающегося сферы по окружности σ . Проекция полученной «плоскости» из центра Z на плоскость, перпендикулярную к OZ , и даст интерпретацию Клейна.

Указания к решению упражнений

К главе 1

1. Из того, что при данном способе построения мы получим одну прямую b , не пересекающую a , вовсе не следует, что мы не получим других не пересекающихся прямых, пользуясь другими способами построения.

2. В этом доказательстве мы молчаливо допускаем, что истинно предложение «Сумма внутренних углов треугольника постоянна». Но это предложение само нуждается в доказательстве. Ниже мы увидим, что в неевклидовых геометриях эта сумма не постоянна.

3. Из того, что до точки пересечения мы не можем прийти при помощи указанного построения, никак не следует, что эта точка не существует. Например, пользуясь современной техникой, мы не можем достичь центра Земли, но отсюда не следует, что этого центра нет.

К главе 2

1. Пусть даны симметричные точки A, A' и B (рис. 14). Нетрудно видеть, что этот чертеж можно восстановить, пользуясь только линейкой.

2. Использовать решение предыдущего упражнения.

3. Если бы эти прямые пересеклись, то это значило бы, что из точки пересечения к прямой проведены два перпендикуляра.

4. Нужно ударить шар в направлении AB' , где B' симметрична с B относительно стенки.

5. Пусть первый борт лежит на прямой s_1 , а второй — на прямой s_2 , $s_1(B) \equiv B_1$, $s_2(B_1) \equiv B_2$. Шар нужно ударить в направлении AB_2 .

6. Пусть первый борт бильярда принадлежит прямой s_1 , второй — прямой s_2 , третий — прямой s_3 , четвертый — прямой s_4 . $s_1(P) \equiv P_1$, $s_2(P_1) \equiv P_2$, $s_3(P_2) \equiv P_3$, $s_4(P_3) \equiv P_4$. Шар P нужно ударить в направлении PP_4 .

К главе 3

1. Если s — данная прямая и точки A и B лежат по разные стороны от нее, то искомая точка M есть пересечение отрезка AB с s . Если A и B лежат по одну сторону от s , то, беря $s(B) \equiv B'$, находим M в пересечении $\overline{AB'}$ с s .

2. Если A и B лежат по одну сторону от s , то искомая точка M есть пересечение AB с s . Если A и B лежат по разные стороны от s , то, беря $s(B) \equiv B'$, находим M в пересечении AB' с s .

3. Докажем сначала, что высота образует меньший угол с меньшей стороной, а медиана — больший угол с меньшей стороной.

4. Провести прямую AM и рассмотреть внешние углы треугольников BMA и CMA при вершине M .

5. Для доказательства нужно рассмотреть расстояние от точки основания до вершины равнобедренного треугольника и расстояние от точки основания до вершины разностороннего треугольника.

6. Очевидно, что искомая прямая может проходить только через вершину данного треугольника ABC . Положим, что она проходит через вершину A и разбивает данный треугольник на треугольники ABD и ACD . Пользуясь условием разносторонности, докажем, что не может быть конгруэнтности треугольников: $\triangle ABD \neq \triangle ACD$, $\triangle ABD \neq \triangle ADC$, $\triangle ABD \neq \triangle CAD$, $\triangle ABD \neq \triangle CDA$, $\triangle ABD \neq \triangle DAC$, $\triangle ABD \neq \triangle DCA$. (Напомним, что, например, равенство $\triangle ABD = \triangle DCA$ обозначает, что $\overline{AB} = \overline{DC}$, $\overline{AD} = \overline{DA}$ и $\overline{BD} = \overline{CA}$.)

7. Положим, что треугольники ABC и $A'B'C'$ одинаково ориентированы, и произведем движение, преобразующее A' в A и C' в C . Докажем, что B' не может преобразоваться ни в B_1 на \overline{AB} , ни в B_2 на продолжении \overline{AB} (применить свойство внешнего угла в треугольниках CBB_1 и CBB_2).

8. Обозначим через M точку пересечения BC и PQ . Отложим от точки P на прямой BC точку D так, чтобы было $\overline{PD} = \overline{PB} = \overline{CQ}$. Тогда получим: $\angle PDB = \angle PBD = \angle QCM$; $\triangle MCQ = \triangle MDP$ (см. предыдущее упражнение), поэтому получим: $\overline{MC} = \overline{MD}$, $\overline{PM} = \overline{QM}$.

9. Пусть $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$. Произведем движение, преобразующее B в D , BC в DA и BA в DC . При этом точка C преобразуется в точку C' на прямой DA . Докажем, что C' не может оказаться ни на отрезке DA , ни на его продолжении (свойство внешнего угла в $\triangle ABC'$). Значит, C' совпадет с A . Аналогично докажем, что точка A' , в которую преобразуется A , совпадет с C . Итак, $\overline{BC} = \overline{DA}$ и $\overline{BA} = \overline{DC}$.

10. Пересечем стороны угла произвольной секущей. Биссектрисы двух внутренних и двух внешних углов полученного треугольника пересекаются в двух точках, через которые проходит искомая биссектриса.

11. Соединим вершины четырехугольника с центром и рассмотрим углы при основаниях полученных равнобедренных треугольников.

12. Воспользоваться тем, что отрезки касательных, выходящих из одной и той же точки, равны между собой.

13. Продолжим MT_1 и NT_2 до пересечения в точке Q ; $\overline{QT_1} = \overline{QT_2}$ и вместе с тем $\overline{T_1M} = \overline{T_2N}$. Мы получили фигуру, тождественную с той, которую мы рассмотрели в упражнении 8. Остается повторить то же доказательство.

14*. Обозначим через α и β соответственно углы при вершинах A и B в треугольнике ABC . Внешний угол, смежный с β , обозначим через β' . По свойству смежных углов $\beta + \beta' = 180^\circ$. Но $\alpha < \beta$; поэтому $\alpha + \beta < 180^\circ$.

15. Находим ось симметрии этих прямых и проводим прямую, перпендикулярную к этой оси.

1. Центр данного параллелограмма есть центр симметрии всех полос, полученных при указанном построении.

2. Провести диагонали, применить свойство средней линии треугольника.

3. Обозначим через $P_1, P_2, P_3, \dots, P_8$ последовательные точки остановок при движении точки P . Докажем, что $\triangle P_1P_2B = \triangle P_1P_2C = \triangle P_8P_8A$. Значит, $\overline{AP_8} = \overline{P_2P_1}$.

4. Обозначая через α, β, γ и δ углы четырехугольника, вычислим противоположные углы четырехугольника, образуемого биссектрисами. Углы эти равны $180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}$ и $180^\circ - \frac{\gamma + \delta}{2}$. Сумма их равна $360^\circ - \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2} = 360^\circ - \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$.

5. Чтобы получить нужную фигуру, возьмем $\triangle ABC$. На продолжении BC за точку C возьмем точку D , а на стороне AB —точку E . Пересечение отрезков AC и ED обозначим через F . Окружности, описанные около треугольников AEF и CDF , имеют общую точку F , поэтому они имеют еще одну общую точку S . Докажем, что в четырехугольнике $BDSE$ $\angle DBE + \angle DSE = 180^\circ$. Если обозначить через α, β и γ углы треугольника ABC , то $\angle DBE = \beta$, а $\angle DSE = \alpha + \gamma$. Но $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Итак, окружность, описанная около $\triangle DBE$, пройдет через S . Аналогично докажем, что через ту же точку пройдет окружность, описанная около $\triangle ABC$.

6. Пусть ABC — данный треугольник, H — его ортоцентр. Прямые AH, BH и CH пересекают описанную окружность соответственно в точках H_1, H_2, H_3 , которые симметричны с H относительно сторон BC, CA и AB . Действительно, $\angle BCH_1 = \angle BAH_1$ (опираются на дугу BH_1), $\angle BAH_1 = \angle BCH$ (стороны их взаимно перпендикулярны). Поэтому $\angle BCH_1 = \angle BCH$ и, значит, прямые CH и CH_1 симметричны относительно BC .

Аналогично прямые BH_1 и BH тоже симметричны относительно BC . Итак, H_1 симметрична с H относительно BC . Возьмем теперь точку P на дуге BC и обозначим через P_1, P_2, P_3 точки, симметричные с P относительно BC, CA и AB . В силу симметрии относительно BC имеем: $\angle CHP_1 = \angle CH_1P$; в силу симметрии относительно AC имеем: $\angle CHP_2 = \angle CH_2P$. Но $\angle CH_1P = \angle CH_2P$, так как оба опираются на дугу CP . Итак, $\angle CHP_1 = \angle CHP_2$, т. е. точки P_1, P_2 лежат на одной и той же прямой с точкой H . Аналогично докажем, что и P_2, P_3 — тоже лежат на одной и той же прямой с H .

7. В $\triangle ABC$ обозначим через H ортоцентр, через H_1, H_2, H_3 — основания высот на сторонах BC, CA и AB , через M_1, M_2, M_3 — середины тех же сторон, через A_1, B_1, C_1 — середины отрезков HA, HB, HC . Пользуясь свойством средней линии треугольника, докажем, что четырехугольники $B_1C_1M_2M_3, C_1A_1M_3M_1, A_1B_1M_1M_2$ — прямоугольники. Их диагонали A_1M_1, B_1M_2 и C_1M_3 пересекаются в одной и той же точке O — центре искомой окружности. Диаметр A_1M_1 есть гипотенуза прямоугольного $\triangle A_1M_1H_2$, поэтому окружность пройдет через H_2 . Аналогично докажем, что она пройдет через H_1 и H_3 .

8. Пусть в треугольник ABC с углами α, β, γ нужно вписать $\triangle MNP$ так, чтобы $M \subset BC, N \subset CA, P \subset AB$. Допустим, что задача решена и мы нашли соответствующие точки M', N' и P' на сторонах треугольника ABC . Окружности, описанные около треугольников $AN'P', BP'M'$ и $CM'N'$, пересекаются в одной и той же точке S , так как $\angle N'SP' + \alpha = 180^\circ, \angle P'SM' + \beta = 180^\circ$, поэтому и $\angle M'SN' + \gamma = 180^\circ$. Точку S внутри треугольника ABC можно найти, определив углы $M'BS$ и $M'CS$, которые получим, построив на сторонах данного треугольника MNP сегменты, вмещающие углы α, β, γ . Эти окружности пересекутся в точке S' . Углы, равные искомому, опираются на дуги MS' . Построив точку S в треугольнике ABC , найдем точки M', N', P' , зная расстояния $S'M, S'N, S'P$.

К главе 5

1. Пусть имеем центральные симметрии с центрами O_1 и O_2 . $O_1(A) \equiv A_1; O_2(A_1) \equiv A'; \vec{AO_1} = \vec{O_1A_1}; \vec{A_1O_2} = \vec{O_2A'}; \vec{AO_1} + \vec{O_1A_1} + \vec{A_1O_2} + \vec{O_2A'} = \vec{AA'}$, или $2\vec{O_1A_1} + 2\vec{A_1O_2} = 2(\vec{O_1A_1} + \vec{A_1O_2}) = 2\vec{O_1O_2}$. Итак, $\vec{AA'} = 2\vec{O_1O_2} = \vec{m}$, т. е. мы имеем параллельный перенос с вектором $\vec{m} = 2\vec{O_1O_2}$. Если центры O_1 и O_2 совпадают, то $\vec{O_1O_2} = \vec{0}$ и преобразование приводится к тождественному.

2. Согласно предыдущему упражнению шесть центральных симметрий приводят к трем переносам с векторами $2\vec{O_1O_2}, 2\vec{O_2O_1}$ и $2\vec{O_2O_3}$. Вектор результирующего переноса равен сумме этих векторов, т. е. $2(\vec{O_1O_2} + \vec{O_2O_3} + \vec{O_3O_1}) = \vec{0}$. Итак, результирующее преобразование — тождественное и, значит, $A_6 \equiv A$.

3. Поместим внутри полосы со сторонами a и b вектор \vec{m} данного направления и пусть $\vec{m}(A) \equiv A'$. Прямая $A'B$ пересекает сторону b в точке N . Далее строим $\vec{MN} = \vec{m}$. Путь $AMNB$ и будет кратчайшим.

4. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник. Перенесем его на вектор $\vec{m} = \vec{AC}$. Полученный четырехугольник вновь перенесем на тот же вектор и т. д. Произведем ряд таких же переносов в противоположном направлении на вектор $-\vec{m}$.

Полученный ряд четырехугольников перенесем на вектор $\vec{BD} = \vec{n}$ и опять повторим этот перенос несколько раз и в прямом и в обратном направлении. В результате вся плоскость будет покрыта четырехугольниками, равными данному.

5. Пусть дана точка O на стороне AB квадрата $ABCD$. Повернув квадрат на 60° около центра O , получим новый квадрат $A'B'C'D'$. Стороны прежнего и нового квадрата пересекаются в точке M' . Возвращая ее в исходное положение, получим точку M . $\triangle OMM'$ — искомый.

6. Пусть $a \parallel b \parallel c$. Возьмем на прямой b точку O и повернем все прямые на 90° около центра O . Тогда прямые a, b, c преобразуются в a', b', c' . Искомая точка M' находится в пересечении c' с a . Возвращая M' в исходное положение, найдем еще вершину M .

7. Пусть O_1 и O_2 — центры данных вращений с углами φ_1 и φ_2 . Разложим первое вращение на осевые симметрии с осями s_1 и s'_1 , причем ось s'_1 совместим с прямой O_1O_2 . Второе вращение разложим на осевые симметрии с осями s_2 и s'_2 и ось s_2 совместим с той же прямой O_1O_2 . Произведя последовательно симметрии s_1, s'_1, s_2, s'_2 , увидим, что симметрии s'_1 и s_2 взаимно уничтожаются и остаются только симметрии s_1 и s'_2 , которые дают вращение на угол $\varphi = 2 \angle s_1s'_2$. Но $\angle s_1s'_2 = \angle s_1s_2 + \angle s_2s'_2$. Поэтому $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Если $\varphi_1 + \varphi_2 = 0$, т. е. если $s_1 \parallel s'_2$, то преобразование приводится к переносу.

8. Пусть O_1 — центр квадрата, построенного на BC , O_2 — построенного на CA , O_3 — построенного на AB . Вращение около O_1 на угол 90° преобразует точку B в точку C . Вращение на тот же угол около точки O_2 преобразует C в A . Наконец, вращение на тот же угол около точки O_3 преобразует A в B . Итак, B есть неподвижная точка преобразования, составленного из трех последовательных вращений. Из предыдущего упражнения мы заключаем, что это есть вращение на угол в $90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 270^\circ$. Так как центр есть единственная неподвижная точка вращения, то этот центр совпадает с точкой B . При помощи построения, указанного в упражнении 7, найдем центр этого вращения, чем и определится точка B .

9. Несобственное движение есть результат нечетного числа осевых симметрий. Соединяя эти симметрии попарно и заменяя два последующих вращения одним, мы приведем это преобразование к трем осевым симметриям с осями s_1, s_2, s_3 . Симметрии s_1s_2 определяют вращение. Так как одну из этих осей можно взять произвольно, то мы возьмем $s_2 \perp s_3$. Тогда преобразование приведет к осевой симметрии s_1 и центральной симметрии, определяемой перпендикулярными осями $s'_2 \perp s'_3$ так, чтобы было $s'_2 \parallel s_1$. Тогда преобразование приводится к переносу, определяемому осями s_1 и s'_2 и симметрией s'_3 , причем ось симметрии s'_3 параллельна вектору переноса.

10. В пантиграфе мы имеем: $MA \parallel QA'$ и $\frac{\overrightarrow{QA'}}{\overrightarrow{QA}} = \frac{\overrightarrow{SQ}}{\overrightarrow{SM}} = \frac{\overrightarrow{SA'}}{\overrightarrow{SA}} = k$.

Итак, точка A преобразуется в A' гомотетией с центром S и коэффициентом k .

11. Центр полуокружности принимаем за центр гомотетии. На диаметре строим квадрат, который этой гомотетией преобразуем в квадрат с вершинами на полуокружности.

12. Примем точку касания за центр гомотетии, преобразующей центр первой окружности в центр второй. Тогда коэффициент гомотетии будет равен отношению радиусов.

13. Пусть a и b — данные прямые, O' — центр данной окружности. Примем точку касания окружностей за центр гомотетии, преобразующей искомую окружность с центром O в данную окружность с центром O' . Эта гомотетия преобразует прямые a и b в параллельные прямые a' и b' , касающиеся данной окружности. Прямые a' и b' мы можем построить. Точка S лежит на прямой, проходящей через соответственные точки ab и $a'b'$, и на данной окружности. Центр O искомой окружности лежит на биссектрисе угла ab и на прямой $O'S$.

14. Пусть даны окружности с центрами O_1, O_2, O_3 . Обозначим через S_{mn} центр положительной гомотетии, преобразующей окружность O_m в окружность O_n ($m, n = 1, 2, 3$). Через S'_{mn} обозначим центр отрицательной гомотетии тех же окружностей. Преобразуя O_1 в O_2 , O_2 в O_3 и O_1 в O_3 , увидим, что центры S_{12}, S_{23} и S_{31} лежат на одной и той же прямой. Аналогично докажем, что на одной и той же прямой лежат $(S_{12}S'_{23}S'_{31}), (S'_{12}S'_{31}S_{23}), (S'_{23}S_{31}S'_{12})$. При этом нужно иметь в виду, что произведение двух отрицательных гомотетий есть гомотетия положительная.

15. Пусть A, B, C, \dots — точки первой фигуры, A', B', C', \dots — соответственные точки второй фигуры и положим, что эти тройки одинаково ориентированы. Парами AB и $A'B'$ определяется преобразование подобия, переводящее точку A в A' и B в B' . Это же преобразование переводит точку C в C_1 . По условию задачи имеем:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}, \text{ а по построению: } \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C_1}{BC} = \frac{C_1A'}{CA}.$$

значит, что $\frac{B'C'}{BC} = \frac{B'C_1}{BC}$ или $\frac{B'C'}{B'C_1} = \frac{BC}{BC}$, т. е. $\overline{B'C'} = \overline{B'C_1}$. Ана-

логично получим $C_1A' = C'A'$. Отсюда следует, что $C_1 \equiv C'$, т. е. что $ABC \sim A'B'C'$. Подобным же образом докажем, что любая тройка точек первой фигуры подобна соответственной тройке точек второй фигуры. Итак, $ABC \dots \sim A'B'C' \dots$. Если бы фигуры оказались противоположно ориентированными, то осевой симметрией одна из них преобразовалась бы в фигуру, одинаково ориентированную и собственно подобную второй.

16. Положим, что в четырехугольник $ABCD$ нужно вписать четырехугольник $MNPQ$, подобный данному четырехугольнику $M'N'P'Q'$, при условии, что $M \subset AB, N \subset BC, P \subset CD, Q \subset DA$. Поставим себе сначала обратную задачу: описать около четырехугольника $M'N'P'Q'$ четырехугольник, подобный $ABCD$. Для этого на отрезках $\overline{MN}, \overline{NP}, \overline{PQ}, \overline{QM}$ построим сегменты, включающие углы: $\angle ABC, \angle BCD, \angle CDA$ и $\angle DAB$. Далее на дуге $M'N'$ отложим дугу от точки M' , на которую опирался бы угол, равный $\angle ABD$, а на дуге $Q'P'$ от точки Q' — дугу, на которую опирался бы угол, равный $\angle ADB$. Прямая, проведенная через две полученные точки, пересечет дуги сегментов в точках B' и D' , которыми определяются вершины искомого четырехугольника: $B'M'$ и $D'Q'$ пересекаются в вершине $A', D'P'$ и $B'N'$ — в вершине C' . $A'B'C'D' \sim ABCD$, так как $A'B'D' \sim ABD$ и $B'C'D' \sim BCD$. Остается полученный четырехугольник $A'B'C'D'$ обратно преобразовать в $ABCD$ и $M'N'P'Q'$ — в $MNPQ$.

17. Пусть ABC — данный треугольник, A' — данная точка, a — данная прямая, окружность с центром O — данная окружность. Произведем преобразование подобия с центром в точке A' , углом

$\varphi = \angle BAC$ и коэффициентом $k = \frac{AC}{AB}$. Этим прямая a преобразуется

в прямую a' , которая пересечет данную окружность в точке C' . Возвращая прямую a' в исходное положение, найдем точку B' , которая преобразовалась в точку C' . По построению имеем:

$\angle B'A'C' = \varphi$, $\frac{A'C'}{A'B'} = k = \frac{AC}{AB}$, т. е. $\frac{A'C'}{AC} = \frac{A'B'}{AB}$. Значит, $\triangle A'B'C' \sim$

$\triangle ABC$. Прямая a может пересечь окружность, коснуться ее или пройти вне ее, поэтому задача может иметь два решения, одно или ни одного.

18. Подобие фигур определяется, если мы двум точкам одной фигуры отнесем две точки другой. Пусть A и B — точки первой фигуры, A' и B' соответственные точки второй. Как уже было показано в тексте, симметрия относительно прямой, параллельной биссектрисе угла между прямыми AB и $A'B'$, преобразует вторую фигуру в фигуру, гомотетичную с первой. Прямая s , проходящая через центр гомотетии перпендикулярно к оси симметрии, остается неподвижной при обоих преобразованиях. Если теперь вторую фигуру преобразуем в симметричную относительно второй биссектрисы угла между AB и $A'B'$, то вновь получим фигуру, гомотетичную с первой. Прямая s' , проходящая через новый центр гомотетии перпендикулярно ко второй биссектрисе, есть тоже неподвижная прямая в обоих преобразованиях, причем $s' \perp s$. Точка S пересечения прямых s и s' есть единственная неподвижная точка преобразования, состоящего из симметрии относительно s или s' с последующей гомотетией с центром S . Двух неподвижных точек в этом преобразовании быть не может, так как если бы имели вторую неподвижную точку S' , то это значило бы, что отрезок SS' преобразуется в себя, т. е. коэффициент подобия при любом преобразовании равен единице, что противоречит определению подобия.

19. Два n -угольника подобны, если между их вершинами можно установить взаимно однозначное соответствие и если выполняется одно из следующих условий: 1°. Если n углов одного соответствуют равны n углам другого и $n - 2$ сходственных сторон пропорциональны. 2°. Если $n - 1$ сходственных сторон пропорциональны и $n - 2$ углов, заключенных между этими сторонами, равны между собой. 3°. Если все стороны одного пропорциональны соответственным сторонам другого и $n - 3$ угла одного равны соответственным углам другого. Все три случая легко доказываются путем разбиения диагоналями многоугольников на треугольники и последовательного доказательства подобия полученных треугольников.

20. Пусть стороны BC , CA и AB треугольника ABC проходят соответственно через неподвижные точки M , N , P . Через эти же точки проходят соответственные стороны подобного треугольника $A'B'C'$. Окружности, описанные около треугольников NPA , PMB , MNC , пройдут соответственно через точки A' , B' , C' (в силу равенства углов). Эти окружности проходят через одну и ту же точку S

(см. упражнение 8 к гл. 4). Так как $\angle BAS = \angle B'A'S$ и $\angle ABS = \angle A'B'S$, то $ABS \sim A'B'S$ и, значит, S есть неподвижная точка преобразования подобия ABC в $A'B'C'$. Покажем, что при изменении треугольника ABC любая прямая, связанная с ним, проходит через одну и ту же точку. Возьмем точки E и F на сторонах BC и AC . Им соответствуют точки E' и F' на сторонах $B'C'$ и $A'C'$. Прямые EF и $E'F'$ пересекаются в точке Q . Так как в подобных фигурах соответственные прямые образуют равные углы, то $\angle EQE' = \angle ESE'$ и, значит, точки E, E', Q, S лежат на одной и той же окружности. На том же основании и $\angle E'MB = \angle ESE'$ и, значит, точка M лежит на той же окружности. А отсюда следует, что эта окружность вполне определена точками E, M, S и потому точка Q ее пересечения с прямой EF не зависит от положения прямой $E'F'$, т. е. является неподвижной. Положим, наконец, что K есть произвольная точка, связанная с треугольником ABC . Произвольная прямая l , проведенная через K , при изменении треугольника проходит через постоянную точку L , прямая KS проходит через постоянную точку S . А так как угол LKS — постоянный (в силу подобия), то точка K описывает окружность.

К главе 6

1. Пусть a и b — данные прямые, p и q — их биссектрисы, причем $p \perp q$. Пересечем этот пучок прямой $l \parallel q$. В сечении получим точки $la \equiv A, lb \equiv B, lp \equiv P$ и $lq \equiv Q_\infty$. В силу симметрии $\overrightarrow{PA} = -\overrightarrow{PB}$ и потому $\frac{\overrightarrow{PA}}{\overrightarrow{PB}} = -1$ и, значит $(abpq) = (ABPQ_\infty) = -1$.

Заметим, что имеет место и обратное предложение: если $(abpq) = -1$ и $p \perp q$, то p и q — биссектрисы углов между прямыми a и b . Действительно, рассмотрим пучок apq и построим прямую b' так, чтобы $\angle pa = \angle pb'$. Но тогда пучок $(ab'pq)$ будет гармоническим и мы получим $(ab'pq) = -1$, т. е. $(ab'pq) = (abpq)$ и, значит, $b' \equiv b$.

2. Обозначим через p и q прямые, параллельные сторонам, через a и b — диагонали. Сторона AB пересекает этот пучок в точках A, B, P, Q_∞ , где P — середина AB . Итак, опять получим $(abpq) = (ABPQ_\infty) = -1$.

3. Применить результат упражнения 1.

4. Пусть A и B — данные точки, $\frac{m}{n}$ — данное отношение. Пользуясь построением, указанным в тексте (рис. 68), найдем точки P и Q , удовлетворяющие условию: $(ABP) = -\frac{m}{n}$, $(ABQ) = \frac{m}{n}$, откуда $(ABPQ) = -1$. Построим на PQ , как на диаметре, окружность и возьмем на ней точку M . Пучок прямых MA, MB, MP, MQ — гармонический и, кроме того, $MP \perp MQ$. На основании упражнения 1 мы получим, что PM есть биссектриса угла AMB в треугольнике AMB . Отсюда $\frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}} = \frac{\overrightarrow{PA}}{\overrightarrow{PB}} = \frac{\overrightarrow{QA}}{\overrightarrow{QB}} = \frac{m}{n}$, т. е. все точки

окружности принадлежат искомому геометрическому месту. Обратно, если эти равенства удовлетворяются, то MP и MQ — биссектрисы углов при вершине M . Поэтому точка M есть вершина прямого угла, опирающегося на отрезок PQ , и, значит, M принадлежит этой окружности.

5. Рассмотрим окружность с диаметром PQ . Точка O , лежащая на этом диаметре, вне круга, имеет относительно этой окружности степень, равную $\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = \overline{OT}^2$, где \overline{OT} — касательная, проведенная из точки O . Окружность, проведенная из центра O радиусом \overline{OT} , пересекает прямую PQ в точках A и B и является ортогональной к данной окружности.

$$\text{Так как } \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OT}, \text{ то } \overline{OP} \cdot \overline{OQ} = \overline{OA}^2 \text{ или } \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OQ}}.$$

Пользуясь свойством равных отношений, получим:

$$\frac{\overline{OP} + \overline{OA}}{\overline{OA} + \overline{OQ}} = \frac{\overline{OP} - \overline{OA}}{\overline{OA} - \overline{OQ}}. \text{ Так как } \overline{OA} = -\overline{OB} = \overline{BO}, \text{ то получим}$$

$$\frac{\overline{BO} + \overline{OP}}{\overline{BO} + \overline{OQ}} = -\frac{\overline{AO} + \overline{OP}}{\overline{AO} + \overline{OQ}} \text{ или } \frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}} = -\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}},$$

$$\text{иначе } \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -\frac{\overline{QA}}{\overline{QB}}, \text{ т. е. } (ABPQ) = -1.$$

6. Построим на отрезках AB и CD , как на диаметрах, окружности. Радикальная ось этих окружностей пересекает их линию центров в точке Q , имеющей одинаковую степень относительно обеих окружностей. Если Q лежит вне этих окружностей, то Q есть центр окружности, ортогональной к обеим окружностям. Поэтому (на основании предыдущего упражнения) точки M и N пересечения этой окружности с линией центров гармонически разделяют и пару AB и пару CD .

7. X , Y и Z — центры трех гомотетий с коэффициентами (BCX) , (CAY) и (ABZ) . Эти гомотетии преобразуют B в C , C в A и A в B . Обозначим через m , n , p расстояния точек A , B и C от прямой l .

Тогда коэффициенты трех гомотетий будут равны: $(BCX) = \frac{n}{p}$,

$(CAY) = \frac{p}{m}$, $(ABX) = \frac{m}{n}$. Так как точки A , B и C лежат или все

по одну сторону от l , или одна по одну и две по другую, то либо все эти отношения положительны, либо два отрицательны и одно положительно. Во всех случаях получим:

$$(BCX)(CAY)(ABZ) = \frac{np}{pm} = 1.$$

Заметим, что предложение остается в силе и тогда, когда l параллельна одной из сторон треугольника.

Обратное предложение легко доказывается методом от противного.

8. Применим предыдущее предложение к треугольнику ABX и секущей прямой CSZ . Получим: $(ABZ)(BXC)(XAS) = 1$.

Применим это же предложение к $\triangle ACX$ и секущей BSY : $(CAY)(XCB)(AXS) = 1$. Итак, мы имеем:

$$\frac{\overrightarrow{ZA}}{\overrightarrow{ZB}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{CX}} \cdot \frac{\overrightarrow{SX}}{\overrightarrow{SA}} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{\overrightarrow{YC}}{\overrightarrow{YA}} \cdot \frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{BC}} \cdot \frac{\overrightarrow{SA}}{\overrightarrow{SX}} = 1.$$

Помножая почленно эти равенства и принимая во внимание, что $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB}$, и заменяя \overrightarrow{BX} на $-\overrightarrow{XB}$ и \overrightarrow{CX} на $-\overrightarrow{XC}$, получим:

$$\frac{\overrightarrow{XB}}{\overrightarrow{XC}} \cdot \frac{\overrightarrow{YC}}{\overrightarrow{YA}} \cdot \frac{\overrightarrow{ZA}}{\overrightarrow{ZB}} = -1, \quad \text{т. е.} \quad (BCX)(CAY)(ABZ) = -1,$$

Обратное предложение также легко доказать методом от противного.

9. Возьмем на той же окружности вторую, произвольную точку S' и проведем прямые $S'A \equiv a'$, $S'B \equiv b'$, $S'C \equiv c'$, $S'D \equiv d'$. Пучок прямых $a'b'c'd'$ конгруэнтен пучку $abcd$ ввиду равенств $\angle ASB = \angle AS'B$, $\angle BSC = \angle BS'C$, $\angle CSD = \angle CS'D$. Поэтому $(abcd) = (a'b'c'd')$.

10. Проведем прямую l через точки $bb' \equiv B$, $cc' \equiv C$. Обозначим через A точку пересечения с l совпадающих прямых a и a' . Пусть также $dl \equiv D$ и $d'l \equiv D'$. Тогда получим: $(abcd) = (ABCD)$, $(a'b'c'd') = (ABCD')$. Но $(abcd) = (a'b'c'd')$, следовательно, и $(ABCD) = (ABCD')$, т. е. $D' \equiv D$ и, значит, прямая l проходит через точку dd' .

11. Положим, что точки A , B и C не лежат на одной и той же прямой. Окружности с центрами B и C , пересекаясь, определяют радикальную ось, проходящую через точки их пересечения. Центр A ортогональной к ним окружности должен лежать на радикальной оси. Значит, радикальная ось окружностей с центрами B и C совпадает с высотой треугольника. Обозначая через M точку пересечения этих окружностей, получим: $MB \perp MC$ (в силу ортогональности). Поэтому точку M найдем в пересечении окружности, построенной на BC , как на диаметре, с высотной прямой, проходящей через точку A . Задача разрешима только для остроугольного треугольника, так как только в этом случае степень точки A относительно обеих окружностей положительна.

12. а) Две точки можно рассматривать как нулевые окружности гиперболического пучка. Проведя через них произвольную окружность, можно получить гиперболический пучок, строя к ней ортогональные окружности с центрами на прямой, проходящей через данные точки.

б) Если дана нулевая окружность и радикальная ось пучка, то вторая нулевая окружность симметрична с первой относительно этой оси.

в) Радикальная ось искомого пучка проходит через середины касательных, проходящих из данной точки к окружности.

13. Пусть AB и $A'B'$ — диаметры данных окружностей, лежащие на линии центров, O — точка пересечения той же прямой с ради-

кальной осью. Обозначим $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, $\overline{OA'} = a'$, $\overline{OB'} = b'$. Тогда будем иметь: $ab = a'b'$.

Обозначим через M центр положительной и через N — центр отрицательной гомотетии этих окружностей и пусть $OM = m$, $ON = n$. В силу гомотетии имеем: $\frac{\overline{MA'}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{MB'}}{\overline{MA}}$, или $\frac{m - a'}{m + b} = \frac{m - b'}{m + a}$; отсюда $m = \frac{aa' - bb'}{(a - b) - (a' - b')}$. Аналогично: $\frac{\overline{NB'}}{\overline{NB}} = \frac{\overline{NA'}}{\overline{NA}}$, или $\frac{b' - n}{b + n} = \frac{a' - n}{a + n}$ и $n = \frac{ab' - a'b}{(a - b) + (a' - b')}$.

Степень точки O относительно окружности с диаметром \overline{MN} равна mn . Перемножая полученные выражения и принимая во внимание, что $a'b' = ab$, получим после некоторых упрощений:

$$mn = ab,$$

т. е. окружность с диаметром MN принадлежит тому же пучку.

14. Окружность, построенная на нулевых точках пучка, ортогональна ко всем окружностям пучка. Поэтому (см. упражнение 5) нулевые окружности гармонически разделяют концы диаметра каждой окружности пучка.

15. Пусть A и B — данные точки, O — центр данной окружности. Положим, что касательная в точке касания данной и искомой окружностей пересекает прямую AB в точке S . Эта точка имеет одну и ту же степень относительно обеих окружностей. Такую же степень имеет точка S относительно любой окружности, проходящей через точки A и B . Поэтому если через точки A и B провести окружность, пересекающую данную окружность, то радикальная ось этих окружностей пройдет через S . Ортогональная окружность с центром в точке S пересечет данную окружность в искомах точках касания.

16. Центр искомой окружности есть точка пересечения линий центров данных пучков.

17. Пусть O — центральная точка пучка, степень которой относительно всех окружностей равна $\mp p^2$ (в зависимости от вида пучка). Если M — данная точка, то прямая QM пересекает искомую окружность еще в точке M' . При этом должно быть справедливо

$$\text{равенство } QM \cdot QM' = \pm p^2, \text{ т. е. } \frac{\overline{QM'}}{\overline{p}} = \frac{\overline{p}}{\overline{QM}} \text{ или } \frac{\overline{OM'}}{\overline{p}} = -\frac{\overline{p}}{\overline{QM}}.$$

И в том и в другом случае отрезок $\overline{QM'}$ находится известным построением. Если пучок параболический, то $p^2 = 0$ и искомая окружность проходит через точки M и Q .

18. Пусть даны две связки с центрами S_1 и S_2 и со степенью p_1^2 и p_2^2 . Радикальная ось искомого пучка совпадает с прямой S_1S_2 . Возьмем теперь произвольную точку M и найдем уже указанным построением M_1 и M_2 , удовлетворяющие условиям:

$$\overline{S_1M_1} \cdot \overline{SM} = p_1^2 \text{ и } \overline{S_2M_2} \cdot \overline{SM} = p_2^2.$$

Три точки M , M_1 и M_2 определяют искомую окружность пучка, который вполне определяется ею и радикальной осью.

19. Радикальная ось данной связки есть линия центров пучка сфер, ортогональных ко всем сферам связки. Доказательство аналогично случаю взаимно ортогональных пучков окружностей.

20. Если S_1 и S_2 — радикальные центры сетей сфер, то радикальная ось искомой связки совпадает с прямой S_1S_2 . Построение сфер связки аналогично построению общей окружности в упражнении 18.

К главе 7

1. Так как $A'B'I \sim BAI$, то $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{IB'}}{\overline{IA}}$, следовательно, $\overline{A'B'} = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{IB'}}{\overline{IA}}$. Но $IB' = \frac{q}{IB}$, поэтому $\overline{A'B'} = \frac{q\overline{BA}}{\overline{IA} \cdot \overline{IB}}$.

2. Окружность инверсии есть аполлониева окружность для двух взаимных в инверсии точек (см. упражнение 4 к главе 4).

3. Окружность инверсии ортогональна к любой окружности пучка, ортогонального к пучку, определяемому данными двумя окружностями. Действительно, если прямая, проходящая через центр инверсии, пересекает окружность в двух соответственных точках A и A' , то всякая окружность, проходящая через эти точки, ортогональна к окружности инверсии. Если эта же окружность ортогональна к первой из данных окружностей, то она ортогональна и ко второй (в силу сохранения величины углов). Отсюда следует, что окружность инверсии принадлежит тому же пучку, который определяется данными окружностями.

4. Принять одну из основных точек пучка за центр инверсии. Тогда пучок преобразуется в пучок прямых, а ортогональный гиперболический пучок — в пучок концентрических окружностей с центром в вершине пучка прямых.

5. Примем данную точку за центр инверсии. Эта инверсия преобразует данные окружности в новые окружности, а искомые касательные окружности — в прямые, касательные к данным окружностям. Построив эти прямые и вновь повторив ту же инверсию, найдем искомые окружности. Построение можно упростить, взяв окружность инверсии, ортогональной к одной из данных окружностей.

6. Использовать построение упражнения 4.

7. В упражнении 14 главы 5 было показано, что центры трех гомотетий, преобразующих окружности друг в друга, лежат на одной и той же прямой. Выберем эти центры так, чтобы они определили гиперболические инверсии, преобразующие эти окружности одна в другую.

Как было показано в упражнении 3, окружности инверсии принадлежат к пучкам, определяемым этими окружностями, а значит, и к связке, которую тоже определяют данные три окружности. А так как центры окружностей инверсии лежат на одной и той же прямой, то, значит, они принадлежат к пучку этой связки.

8. Если три окружности инверсий, преобразующих данные окружности друг в друга, образуют эллиптический и параболический пучки, то, приняв основную точку пучка за центр новой инверсии, преобразуем три инверсии в три осевые симметрии. Окружности,

полученные после преобразования, равны друг другу в силу симметрии.

9. Преобразуем три данные окружности в три равные окружности с центрами O_1, O_2, O_3 . Центр окружности, касающейся данных извне, находится на равном расстоянии от O_1, O_2, O_3 . В той же точке находится центр окружности, касающейся данных изнутри. Пусть теперь центры O_1 и O_2 находятся внутри касающейся окружности, а O_3 — вне. Будем радиусы окружностей O_1, O_2 и окружности касания уменьшать на один и тот же отрезок, а радиус окружности O_3 на тот же отрезок увеличивать. При таком преобразовании касание будет сохраняться.

Когда окружности O_1 и O_2 стянутся в точку, окружность O_3 будет иметь радиус вдвое больше первоначального. Теперь задача привелась к той, которая была решена в упражнении 15 к главе 6. Найдя окружность касания, мы увеличим ее радиус до прежней величины и также поступим с окружностями O_1 и O_2 , а радиус окружности O_3 уменьшим до прежнего размера. Получив все касающиеся окружности, мы вновь произведем ту же инверсию и получим решение задачи.

10. Возьмем на данных окружностях точки A и A' , взаимные в инверсии, преобразующей эти окружности друг в друга. Любая окружность, проходящая через A и A' , есть неподвижная окружность инверсии. По свойству инверсии эта окружность образует с обеими окружностями равные углы.

Пусть, обратно, некоторая окружность с центром C пересекает окружности O и O' соответственно в точках A и A', B и B' , причем углы, образуемые окружностями в этих точках, равны и противоположно ориентированы. Обозначим через I точку пересечения прямых AA' и BB' . Инверсия со степенью, равной $\overline{IA} \cdot \overline{IA'} = \overline{IB} \cdot \overline{IB'}$, преобразует окружность C в самое себя, а окружность O преобразует в окружность, проходящую через точки A' и B' и в силу равенства углов касательные в точке A' к этой окружности и окружности O' совпадают, а значит, совпадают и самые окружности.

11. Исходя из соотношения $k = \frac{q}{q'}$, получим, что в случае пересекающихся окружностей степень одного центра гомотетии всегда положительна, а другого — отрицательна, поэтому в обоих случаях $q = kq'$ — положительно, т. е. обе инверсии гиперболические. Окружности обеих инверсий проходят через точку пересечения данных окружностей и делят угол между ними пополам. Они ортогональны, так как взаимно перпендикулярны биссектрисы смежных углов.

12. Эллиптическая инверсия задана окружностью с центром O, A — данная точка. Проведем из центра перпендикуляр к прямой OA , который пересечет окружность в точке P . Перпендикуляр из точки P к прямой AP пересечет прямую OA в искомой точке A' . По свойству высоты прямоугольного треугольника $AA'P$ имеем:

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OP}^2 = r^2.$$

13. Найдём сначала гиперболическую инверсию, преобразующую данные сферы друг в друга. Беря произвольную точку на полученной сфере инверсии за центр новой инверсии, преобразуем прежнюю инверсию в симметрию относительно плоскости.

14. Примем данную точку за центр инверсии, преобразующей данную сферу в себя. Тогда данная окружность преобразуется в новую окружность на той же сфере.

15. Плоскость данной окружности проходит через центр сферы инверсии. Эта плоскость пересекает сферу по окружности большого круга, относительно которой данные точки тоже взаимны в инверсии с тем же центром. Поэтому обе окружности ортогональны. Касательная плоскость перпендикулярна к плоскости окружности и проходит через касательную к окружности большого круга. Поэтому окружность и сфера ортогональны.

16. В предыдущем упражнении доказано, что центр ортогональной сферы лежит в плоскости данной окружности. Поэтому центр искомой сферы, ортогональной к обоим окружностям, должен находиться на линии пересечения плоскостей этих окружностей. В силу ортогональности касательные, проведенные из центра искомой сферы к данным окружностям, равны радиусу этой сферы. А это значит, что центр сферы имеет одну и ту же степень относительно двух сфер, центры которых совпадают с центрами данных окружностей, а радиусы равны радиусам этих окружностей. Следовательно, центр лежит в радикальной плоскости этих сфер и потому он однозначно определяется пересечением этой плоскости с линией пересечения плоскостей данных окружностей.

17. Геометрическое место точек, имеющих одинаковую степень относительно двух сфер, есть радикальная плоскость этих сфер, ортогональных к данной, она пересекает данную сферу по радикальному кругу.

18. Пучок окружностей на сфере получается в результате пересечения сферы пучком ортогональных сфер. Характер пучка окружностей определяется характером пучка сфер: от эллиптического пучка получится эллиптический, от параболического — параболический, от гиперболического — гиперболический. Множество окружностей, ортогональных к данному пучку, образует новый пучок.

19. Так как при стереографической проекции окружность на сфере переходит в окружность на плоскости, причем сохраняется величина углов, то все виды пучков на сфере переходят в соответствующие пучки на плоскости.

20. Через три окружности сферы проходят три ортогональные сферы, которые определяют связку. Радикальная ось связки проходит через центр сферы, так как он имеет одну и ту же степень относительно трех сфер. Эта радикальная ось определяет общий диаметр трех радикальных кругов. Все сферы связки с этой осью определяют в пересечении с данной сферой соответствующую связку окружностей на сфере.

К главе 8

1. Для доказательства достаточно припомнить предложения: «Две окружности определяют единственный пучок», «Три окружности определяют единственную связку», «Две связки определяют единственный общий пучок» и т. д. Заменяя в этих определениях слово «окружность» словом «точка», слово «пучок» словом «прямая», слово «связка» словом «плоскость», убедимся, что все аксиомы сочетания и следствия из них выполняются в этом пространстве.

2. Это и все последующие упражнения решаются тем же приемом, как и в предыдущем упражнении. Например, решим упраж-

нение 8. Переводя приведенное там предложение на язык сферической геометрии, получим: «Сеть сфер и не принадлежащий этой сети пучок сфер имеют единственную общую сферу». Для доказательства возьмем сеть сфер с радикальным центром S и пучок сфер с центральной точкой Q (т. е. с точкой пересечения радикальной плоскости с линией центров пучка). Плоскость, проходящая через точку S и линию центров пучка, даст в сечении с сетью связку окружностей с тем же центром S и с той же степенью, а в сечении с пучком сфер — пучок окружностей. Искомая сфера даст в сечении окружность, одновременно принадлежащую пучку и связке. Для ее построения находим связку, определяемую пучком и одной из окружностей связки с центром S . Эти связки определяют общий пучок (см. упр. 18 к главе 6). Полученный пучок с данным определяют искомую окружность (см. упр. 16 к главе 6).

К главе 9

1. Если через точку пересечения двух взаимно ортогональных окружностей провести окружность, ортогональную к первой, то она будет касательной ко второй, так как касательные прямые, будучи перпендикулярны к одному и тому же радиусу первой окружности, совпадут друг с другом.

2. Указанная ось симметрии есть единственная окружность гиперболической инверсии, преобразующая друг в друга две окружности гиперболического пучка. Как уже доказано (см. упражнение 3 к главе 7), такая окружность всегда существует.

3. Если все три окружности, представляющие собой три прямые гиперболического пучка, находятся вне друг друга, то их оси симметрии образуют эллиптический пучок, центр которого есть центр искомой окружности, касающейся трех прямых.

4. Если стороны угла пересекают абсолют в точках M и N , то искомая «прямая» есть единственная окружность, проходящая через M и N ортогонально к абсолюту. Ее центр находится в точке пересечения касательных, проходящих через M и N .

5. Если через центр симметрии провести прямую, перпендикулярную к одной из данных прямых, то в силу симметрии эта прямая будет перпендикулярна и к другой, а две прямые, перпендикулярные к одной и той же третьей, — расходящиеся.

6. Единственный центр симметрии есть середина единственного отрезка, перпендикулярного к обоим прямым (см. T_1 , п. 9. 7).

7. Не нарушая общности вывода, можно взять вершину острого угла в центре S абсолюта. Стороны его пересекают абсолют в точках M и N . Прямая, проходящая через M и перпендикулярная к SN , изобразится ортогональной окружностью, проходящей через M с центром на прямой SN . Она пересекает SN в точке P . Дуга PM есть луч этой прямой и длина его бесконечна. Остальные расстояния от точек стороны SM до стороны SN неограниченно приближаются к этому лучу и потому могут стать больше любого данного расстояния.

8. Если взять середину отрезка, соединяющего вершины внутренних накрест лежащих углов, за центр симметрии, то увидим, что данные прямые центрально симметричны, а потому они расходящиеся (см. упражнение 5).

9. Пусть ABC — данный треугольник, O_1 и O_2 — середины сторон AB и AC . Проводим перпендикуляр \overline{AP} к прямой O_1O_2 ($P \in O_1O_2$). Примем O_1 и O_2 за центры симметрии. Тогда получим: $O_1(A) \equiv B$; $O_1(P) \equiv P_1$; $O_2(A) \equiv C$; $O_2(P) \equiv P_2$. Отсюда следует, что $\overline{BP_1} = \overline{AP}$ и $\overline{CP_2} = \overline{AP}$, поэтому $\overline{BP_1} = \overline{CP_2}$. Кроме того, углы четырехугольника BCP_1P_2 при вершинах P_1 и P_2 — прямые. Поэтому ось симметрии точек P_1 и P_2 будет осью симметрии и для точек B и C . Следовательно, прямые BC и O_1O_2 — расходящиеся, так как перпендикулярны к одной и той же прямой s .

10. Возьмем вершину угла в центре S абсолюта. Стороны a и b угла пересекают абсолют в точках A и B . Ортогональная окружность m , проходящая через A и B , представляет собой «прямую», параллельную сторонам угла. Биссектриса s этого угла пересекает m в точке M . Здесь мы имеем: $\angle ASM$ есть угол параллельности, $\overline{SM} = x$ есть расстояние параллельности. Возьмем на биссектрисе еще точку M' так, чтобы было $\overline{SM'} > \overline{SM}$, проведем через M' «прямую» m' , перпендикулярную к биссектрисе. Представляющая эту прямую окружность пересечет абсолют в точках A' и B' , лежащих внутри дуги AB . Поэтому $\angle A'M'B' < \angle AMB$. Итак, большему расстоянию параллельности соответствует меньший угол параллельности.

11. Пусть σ — окружность абсолюта, a и b — ортогональные окружности, представляющие «прямые». Первая окружность пересекает абсолют в точках A и A' , а вторая — в точках B и B' .

Касательная в точке A к абсолюту пересекает радикальную ось BB' в точке O_1 . Окружность с центром O_1 и радиусом $\overline{O_1A}$ будет представлять собой прямую, параллельную a и ортогональную к b . Вторую окружность получим, проведя касательную в точке A' и повторив такое же построение.

12. Окружность инверсии, преобразующей данные орициклы друг в друга, ортогональна к абсолюту и проходит через точки пересечения орициклов. Она и есть «ось симметрии» орициклов.

К главе 10

1. Возьмем произвольную точку S и проведем из нее два луча a и b под углом 45° друг к другу. Отложим на этих лучах отрезки $\overline{SA} = \overline{SB}$. Через точки A и B проведем два луча под углом 45° к лучам a и b . Из точек A и B проведем перпендикуляры к полученным лучам. Эти перпендикуляры пересекутся в точке O на биссектрисе угла. Радиусом $\overline{OA} = \overline{OB}$ проведем из центра O окружность. Ортогональную к ней окружность с центром S примем за абсолют гиперболической плоскости. $\triangle SAB$, сторонами которого служат отрезки \overline{SA} и \overline{SB} , а также дуга AB , имеет три угла по 45° и, значит, является равносторонним. Площадь его при $k = 1$ равна $\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$. Преобразованием подобия этот треугольник можно поместить на гиперболической плоскости с любым абсолютном.

2. Через точку S проведем две взаимно перпендикулярные прямые n , пользуясь предыдущим построением, пересечем каждый из

прямых углов дугой окружности, которая образовала бы с каждой из сторон угла угол, равный $22^{\circ}30'$. Полученные четыре дуги образуют равносторонний четырехугольник, все углы которого равны 45° .

Площадь такого четырехугольника равна $2\pi - 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi$. Но на-

ми было доказано, что площадь треугольника всегда меньше π . Поэтому полученный четырехугольник нельзя поместить внутри треугольника.

3. Возьмем точку P и найдем точку P' , симметричную с ней относительно данной «плоскости», т. е. взаимную в инверсии относительно данной сферы. «Прямая» PP' , пересекающая «плоскость» в точке Q , есть искомый перпендикуляр, так как всякая «прямая», проходящая по «плоскости» через точку Q , есть окружность инверсии для P и P' и потому эти прямые взаимно перпендикулярны. Единственность перпендикуляра следует из того, что, допустив существование второго перпендикуляра PQ' , продолжив его на такое же расстояние $\overline{P'Q'} = \overline{PQ}$, мы получили бы вторую точку P'' , симметричную с P относительно той же плоскости, что противоречит единственности точки P' .

4. Пусть α — данная плоскость, l — данная прямая. Симметрия относительно плоскости α преобразует прямую l в прямую l' . Плоскость, проходящая через l и l' (т. е. сфера, проходящая через две взаимные в инверсии окружности сети), пересекает плоскость α по прямой s — оси симметрии прямых l и l' . Прямая s и есть проекция l на плоскость α .

5. Если две прямые параллельны, то это значит, что они имеют общую точку, принадлежащую абсолюту и лежащую на пересечении данной плоскости с абсолютом. Но тогда через эту же точку пройдет и проекция данной прямой на плоскость, потому что прямая и ее проекция лежат в проектирующей плоскости и указанная точка абсолюта есть единственная точка пересечения трех плоскостей: плоскости проекции, проектирующей плоскости и плоскости, определяемой данной прямой и прямой, ей параллельной.

6. Проведем проектирующую плоскость через данную прямую и ее проекцию. В этой плоскости существует единственный перпендикуляр между расходящимися прямыми — данной прямой и ее проекцией. Он является единственным общим перпендикуляром к прямой и плоскости, так как все остальные перпендикуляры, проведенные из точек прямой к плоскости, лежат в проектирующей плоскости и потому они перпендикулярны к плоскости проекции, но не перпендикулярны к прямой по общему свойству расходящихся прямых.

7. Пусть прямая l расходится с прямой a , принадлежащей плоскости α , l' — проекция l на α . Если бы l' и l имели общую точку — собственную или несобственную, то эта точка была бы общей для трех плоскостей: α , ll' и la , т. е. она принадлежала бы и прямым l и a , которые расходятся. Итак, прямая l расходится с l' .

8. Две сферы гиперболической сети вместе со сферой абсолюта определяют связку сфер.

Точки радикальной оси этой связки, лежащие вне этих сфер, являются центрами сфер пучка, ортогонального к связке. Каждая из сфер этого пучка представляет собой «плоскость», перпендикуляр-

ную к двум данным «плоскостям». Сферы сети, не имеющие общих точек, представляют собой расходящиеся «плоскости», сферы, касающиеся друг друга (точка касания всегда принадлежит абсолют), являются параллельными «плоскостями», пересекающиеся сферы представляют собой пересекающиеся «плоскости».

9. Пусть α — данная «плоскость», l — данная «прямая», Q — точка абсолюта, общая для α и l . Через окружность l проходят все сферы пучка, принадлежащего нашей сети. Одна и только одна из сфер этого пучка проходит через точку Q . Эта сфера и есть единственная «плоскость», проходящая через l и параллельная α .

10. Пусть α и β — две расходящиеся «плоскости». Это значит, что сферы α и β не имеют общих точек. Искомый «перпендикуляр» есть окружность, ортогональная к обоим сферам. Плоскость этой окружности проходит через центры сфер и центр абсолюта. Поэтому искомая окружность есть ортогональная окружность гиперболической связки окружностей, которые получаются от пересечения указанной плоскостью двух данных сфер и абсолюта. Окружность эта, конечно, единственная. Пересекая эти «плоскости» перпендикулярной плоскостью, проходящей через общий перпендикуляр, получим в любом сечении расходящиеся прямые, расстояния между которыми неограниченно увеличиваются.

11. Расстояние от эквидистантной поверхности до плоскости везде одинаково. Диаметральная плоскость пересекает основную плоскость по прямой, а поверхность — по линии, точки которой находятся на равных расстояниях от прямой, т. е. эта линия — эквидистанта.

12. В гиперболической сети эквидистантная поверхность представляется сферой, которая пересекает сферу сети (т. е. «плоскость») по окружности, принадлежащей абсолюту. Примем эту окружность за абсолют на эквидистантной поверхности, а все проходящие по этой поверхности эквидистанты — за «прямые» гиперболической планиметрии. Каждая эквидистанта — результат пересечения эквидистантной поверхности диаметральной плоскостью, которая перпендикулярна к основной плоскости эквидистантной поверхности. Поэтому все эквидистанты этой поверхности ортогональны к окружности сечения на абсолют. Если мы при помощи инверсии преобразуем эквидистантную поверхность в плоскость, то мы получим то самое отображение гиперболической планиметрии, каким все время пользовались в этой книге.

К главе 11

1. Искомая площадь выражается формулой:

$$S = p^2 \left[\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) - \pi \right] = \frac{p^2 \pi}{2}.$$

2. Две сферы эллиптической сети всегда пересекаются.

3; 4. Все сферы эллиптической сети, ортогональные к данной сфере сети, образуют эллиптическую связку сфер. Они пересекаются по окружностям, ортогональным к этой сфере, которые все проходят через основные точки связки. Эти окружности представляют собой «перпендикуляры» к одной и той же плоскости, пересекающиеся в одной и той же точке.

5. Рассмотрим связку сфер, проходящих через две взаимные в эллиптической сети точки. Существует единственная сфера сети, ортогональная ко всем сферам связки. Эта сфера изображает «полярную плоскость» данной точки.

6. Сферы, ортогональные к данной связке прямых, образуют пучок, причем одна из сфер этого пучка принадлежит эллиптической сети и потому является полярной плоскостью «точки», которая отображается двумя основными точками связки.

7. Окружность эллиптического пространства есть геометрическое место точек, равноудаленных от данной прямой. Если вращать эту окружность около диаметра, перпендикулярного к этой прямой, то получим сферу, все точки которой равноудалены от плоскости, описываемой вращающейся прямой.

8; 9; 10. Так как диаметральная сфера эллиптической сети вполне равноправна со всеми остальными сферами сети, то, не нарушая общности, мы можем решение этих упражнений провести применительно к этой «плоскости» эллиптического пространства. Полусом этой «плоскости», очевидно, служит точка S — центр сети. Каждая «плоскость», проходящая через точку S , есть диаметральная плоскость, и полюсом ее служит «точка», определяемая парой точек, соответствующих «полюсам» полученного «экватора» (на рис. 174, O есть полюс для плоскости экватора l). Понятно, что и взаимно всякой точке «плоскости» диаметральной сферы соответствует поляр, проходящая через точку S .

Если теперь какая-нибудь точка будет пробегать по окружности l , то ее поляры будут всегда проходить через прямую OO (рис. 174). Поэтому OO будет полярной «прямой» l . Обратно, всякая плоскость, проходящая через OO , будет иметь полюс на «прямой» l . Значит, полярность прямых взаимна.

11. Пусть l есть окружность сети, отображающая данную «прямую». Множество сфер сети, проходящих через l , образует пучок сфер (т. е. пучок «плоскостей»). Связка сфер, ортогональная к этому пучку, имеет с данной сетью общий пучок, ортогональный к пучку, проходящему через l . Одна из сфер этого пучка проходит через данную точку. Она и есть искомая перпендикулярная «плоскость».

12. Пользуясь решением предыдущего упражнения, проведем через данную точку плоскость, перпендикулярную к линии пересечения данных плоскостей.

К главе 12

1. Во всех случаях центр искомой окружности определяется как точка пересечения осей симметрии трех данных «прямых». Осями симметрии являются окружности инверсии, преобразующие данные окружности друг в друга.

2; 3. Оба предложения являются предложениями абсолютной геометрии и доказываются независимо от аксиомы параллельности (см. упражнения 11 и 12 к главе 3).

4. Поскольку все «прямые» и «точки» этой интерпретации являются прямыми и точками евклидовой плоскости, то аксиомы сочетания и порядка легко для них проверяются. Возьмем теперь произвольную хорду AB данной окружности и произвольную точку P вне ее. Проведем через P хорды AA' и BB' . Они являются «па-

раллельными» этой интерпретации, так как имеют с прямой AB общие несобственные точки A и B . Прямые, проходящие через точку P внутри угла AOB' , являются расходящимися с прямой AB .

5. Примем Z за центр гиперболической инверсии. Эта инверсия преобразует сферу Σ в самое себя. Плоскости, проходящие через Z и пересекающие сферу Σ , определяют окружности, являющиеся «прямыми» гиперболической связки на сфере. В то же время эти плоскости пересекают плоскость окружности σ по прямым, которые являются «прямыми» интерпретации Клейна на круге σ . Этим установлено взаимно однозначное соответствие между обеими интерпретациями.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Глава 1. Краткие исторические сведения	5
Глава 2. Абсолютная геометрия	14
Глава 3. Абсолютная геометрия (продолжение)	24
Глава 4. Центральная симметрия и переход к евклидовой геометрии	37
Глава 5. Линейные преобразования в евклидовой плоскости	51
Глава 6. Инварианты. Геометрия окружностей и сфер	71
Глава 7. Инверсия	91
Глава 8. Осуществление евклидовой геометрии в параболической сети сфер	113
Глава 9. Осуществление геометрии Лобачевского — Больяи в гиперболической сети сфер	130
Глава 10. Метрика гиперболической геометрии и основные свойства гиперболического пространства	150
Глава 11. Осуществление эллиптической геометрии Римана в эллиптической сети сфер	176
Глава 12. Общие выводы. Геометрия и реальное пространство	199
Заключение	213
Указания к решению упражнений	215

Антонин Иванович Фетисов

ОЧЕРКИ ПО ЕВКЛИДОВОЙ
И НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Редактор *Э. К. Викулина*

Художник *А. Т. Яковлев*

Художественный редактор *Б. Л. Николаев*

Технический редактор *В. В. Новоселова*

Корректор *С. А. Кунгурцева*

Сдано в набор 12/II 1965 г. Подписано к печати 2/VIII 1965 г. $84 \times 108 \frac{1}{32}$ Печ. л. 7,375 (12,39). Уч.-изд. л. 11,89. Тираж 17 000 экз. Пл. 1965 г. № 234. А 11565.

Издательство «Просвещение» Государственного комитета Совета Министров РСФСР по печати, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров РСФСР по печати, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. Заказ № 247

Цена без переплета 32 коп., переплет 10 коп.

Цена 42 коп.

